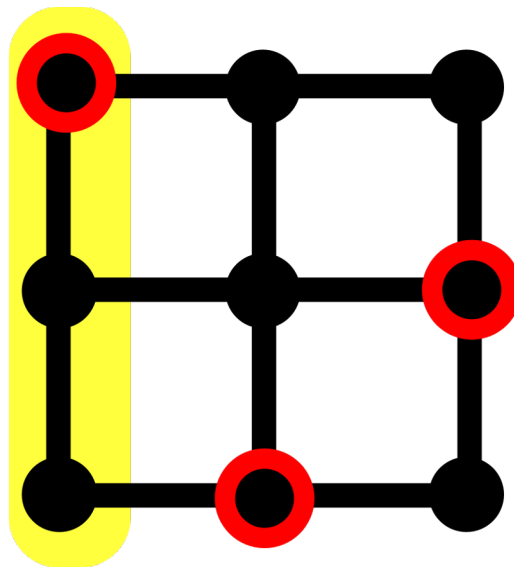


Faszinierende Mengen in Polarräumen

Ferdinand Ihringer
Betreuer: Prof. Dr. Klaus Metsch

Mathematisches Institut
Justus-Liebig-Universität Gießen

9. Dezember 2011



Englischer Titel: „Intriguing Sets in Polar Spaces“

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	4
1 Einführung	7
1.1 Projektive Räume	7
1.2 Polarräume & Quadriken	9
1.3 Stark reguläre Graphen	12
2 Elementare Eigenschaften der Intriguing Sets	17
2.1 Knotenmengen stark regulärer Graphen	17
2.2 Intriguing Sets	20
2.2.1 x -Tight Sets	21
2.2.2 m -Ovoids	22
2.3 Verbindungen zu geometrischen Strukturen	25
2.3.1 Polarräume	25
2.3.2 Verallgemeinerte Vierecke	28
2.3.3 Kleinquadrik	29
3 Konstruktionen von Intriguing Sets in Polarräumen	31
3.1 Einfache Konstruktionen	31
3.2 Hyperebenenschnitte	35
3.3 Unterkörpereinbettungen	39
3.4 Körperreduktionen und -ableitungen	44
3.4.1 Körperreduktionen von klassischen endlichen Polarräumen	44
3.4.2 Intriguing Sets durch Körperreduktionen	57
3.5 m -Systems	60
3.6 Irreduzible Tight Sets durch Überdecken eines Erzeugers	65
4 Existenzresultate	69
4.1 Differenzmengen und Projektive Mengen	69
4.2 Existenzaussagen für m -Ovoide	74
4.3 Kleine Tight Sets in $Q^+(5, q)$	79
A Auflistung neuer Inhalte	85
Literatur	89
B Selbständigkeitserklärung	93

Vorwort

Diese Arbeit handelt über faszinierende Mengen in Polarräumen. Diesen schönen Namen haben sich John Bamberg, Maska Law und Tim Pentilla ausgedacht. Natürlich auf Englisch, wo es dann „Intriguing Sets“ heißt*. Der Begriff weckt bei manchen meiner Bekannten Assoziationen zu romantischen Schneelandschaften oder Speiseeis in einer Tiefkühltruhe. Zwar haben diese Vergleiche, wenig überraschend, durchweg nichts mit dem Thema dieser Arbeit zu tun, doch zeigen sie auch, wie schön man mathematische Objekte benennen kann.

Ob faszinierende Mengen nicht nur schön sind, sondern auch eine praktische Anwendung haben, ist mir zum jetzigen Zeitpunkt nicht bekannt. Generell lassen sich aber zu Objekten der endlichen Geometrie Anwendungen finden, so z.B. in der Spieltheorie, der Codierungstheorie oder der theoretischen Physik[†]. Es erscheint also plausibel, dass dies auch für Intriguing Sets möglich ist.

Die verwendete Mathematik selbst ist sehr vielfältig und deckt verschiedenste Aspekte ab, unter denen man Polarräume betrachten kann. Im Folgenden werden kurz die einzelnen Inhalte der Kapitel und Unterabschnitte vorgestellt. Im Anhang findet sich eine mehr technische Auflistung dessen, was inhaltlich neu ist.

Kapitel 1 soll die Notation klären. Es werden projektive Räume, Polarräume und stark reguläre Graphen kurz eingeführt. Ein Spezialfall von faszinierenden Mengen, maximalen Cliques und Cocliques, werden vorgestellt – auch, um etwas über die Geschichte von faszinierenden Mengen zu sagen.

In Kapitel 2 werden (gewichtete) faszinierende Mengen, m -Ovoide und x -Tight Sets, als Extremalstrukturen von stark regulären Graphen – in dieser Form neu – motiviert und definiert. Zudem werden eine Reihe von allgemeinen Aussagen bewiesen und Beispiele angegeben. Hervorzuheben ist das in dieser Allgemeinheit neue Beispiel 2.2.6. Das Kapitel schließt mit dem Vorstellen einiger speziellen stark regulärer Graphen, wobei der Schwerpunkt auf Polarräume gelegt wird.

Kapitel 3, das bei weitem umfangreichste Kapitel, stellt eine große Menge an Konstruktionen für Intriguing Sets vor. Abschnitt 3.1 stellt einfache Konstruktionen vor und definiert das Konzept der Irreduzibilität. Abschnitt 3.2 nutzt erstmals die Struktur der Polarräume aus. Es wird gezeigt, wie Hyperebenen-

*Ich verwende in der Arbeit durchgehend die englische Bezeichnung.

[†]Siehe [20], [8] und [19].

schnitte und natürliche Einbettungen von Polarräumen über dem selben Körper Intriguing Sets liefern. Abschnitt 3.3 listet mit Beweis einige Beispiele für faszinierende Menge auf, die man direkt als Bahn einer Gruppe erhält. Abschnitt 3.4 führt umfangreich vor, was Körperreduktionen mit Polarräumen machen, um so neue Intriguing Sets zu erhalten. Insbesondere wird ein Fehler in [15] korrigiert. In Abschnitt 3.5 werden m -Systems eingeführt und es wird gezeigt, dass diese – und damit sämtliche Literatur über m -Systems – m -Ovoide liefern. Abschnitt 3.6 greift eine allgemeine Konstruktion aus 3.1 auf, um ein mit Linda Beukemann entdecktes generisches Konstruktionsverfahren für bestimmte, vergleichsweise kleine irreduzible Tight Sets anzugeben.

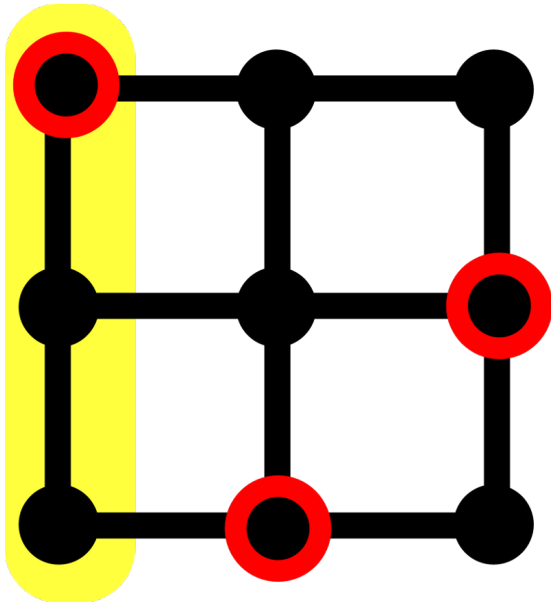


Abbildung 0.1: Ovoid und Tight Set in $Q^+(3,2)$.

Kapitel 4 wendet sich nun Nichtexistenzresultaten für faszinierende Mengen zu. In 4.1 und 4.2 wird das Nichtexistenzresultat aus [4] für m -Ovoid in bestimmten Polarräumen nach meiner Kenntnis zum ersten Mal am Stück und ausführlich aufgeschrieben. Abschnitt 4.3 wird ein Nichtexistenzresultat aus [24] für kleine x -Tight Sets in $Q^+(5, q)$ auf nicht-negativ gewichtete x -Tight Sets verallgemeinert.

Bedanken möchte ich mich bei Klaus Metsch für die hervorragende Betreuung der Arbeit, der sowohl

freundlich auf Ungenauigkeiten hinwies, als auch meine zeitweise etwas gehäuften Tippfehler in den Entwürfen der Arbeit aushielt. Bedanken möchte ich mich ebenso bei Linda Beukemann für ihren gelegentlichen Rat* und sowohl Linda als auch Thomas Schwarzpaul dafür, dass ich in ihrem Zimmer arbeiten durfte. Bastian Dörig danke ich für das kritische und unaufgeforderte Korrekturlesen der Arbeit.

Letztendlich möchte ich mich zum Schluss meines Studiums bei meiner Familie für ihre Unterstützung bedanken.

*Sowie Abschnitt 3.6!

1 Einführung

Im Folgenden sollen kurz grundlegende Begriffe und Notationen vorgestellt werden, die in dieser Arbeit verwendet werden. Die Darstellung der ersten beiden Abschnitte basiert auf [22], [23] und [10]. Dort finden sich auch weitere Quellen und detailliertere Ausführungen. Die Aussagen des dritten Abschnitts finden sich z.B. ausführlicher in [9] (Kapitel 1 und 2) oder den im Abschnitt selbst genannten Quellen.

1.1 Projektive Räume

Definition 1.1.1 (nach [22]). Eine **Inzidenzstruktur** ist ein Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ von Mengen \mathcal{P}, \mathcal{G} und einer Relation $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{G}$ mit $\mathcal{P} \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Die Elemente von \mathcal{P} heißen meist **Punkte** und die Elemente von \mathcal{G} meist **Geraden**. Eine Inzidenzstruktur heißt **endlich**, falls \mathcal{P} und \mathcal{G} endlich sind.

Gilt $P I g$ für einen Punkt P und eine Gerade g , so sind P und g **inzident**. Man sagt auch, g trifft P oder P liegt auf g . Zwei Inzidenzstrukturen $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ und $(\mathcal{P}', \mathcal{G}', I')$ heißen isomorph, falls bijektive Abbildungen $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ und $\beta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ existieren, für die für alle $P \in \mathcal{P}$ und $g \in \mathcal{G}$ gilt:

$$P I g \Leftrightarrow P^\alpha I' g^\beta.$$

Definition 1.1.2. Eine Inzidenzstruktur heißt **projektiver Raum**, falls gilt:

- (PR1)** Zwei verschiedene Punkte P und Q sind durch genau eine Gerade ℓ verbunden.
- (PR2)** Seien g_1 und g_2 zwei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt P treffen. Sind h_1 und h_2 zwei Geraden, die g_1 und g_2 treffen, aber nicht durch P gehen, so treffen sich h_1 und h_2 .
- (PR3)** Jede Gerade hat mindestens drei Punkte. Es gibt drei Punkte, die nicht zusammen auf einer Geraden liegen.

Bezeichne im folgenden die Dimension eines Vektorraums als **Rang**, da der Begriff Dimension für den projektiven Raum verwendet wird. Ein Vektorraum V liefert ein Beispiel für einen projektiven Raum $\mathcal{P}(V)$, indem man

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &:= \{U \text{ ist Unterraum von } V \mid \text{Rang}(U) = 1\} \\ \mathcal{G} &:= \{U \text{ ist Unterraum von } V \mid \text{Rang}(U) = 2\} \\ P \text{ I } g &:\Leftrightarrow P \subseteq g\end{aligned}$$

für $P \in \mathcal{P}$ und $g \in \mathcal{G}$ setzt. Die **Dimension** von $\mathcal{P}(V)$ wird um eins kleiner als der Rang von V definiert. Eine Teilmenge \mathcal{P}' von \mathcal{P} heißt Unterraum von \mathcal{P} der Dimension d , falls \mathcal{P}' die Menge der Unterräume mit Rang 1 eines Unterraums mit Rang $d+1$ von V ist. Beachte, dass entsprechend die leere Menge Dimension -1 hat. Eine Menge von Punkten heißt **kollinear**, wenn sie auf einer gemeinsamen Gerade liegen.

Für Unterräume U_1, U_2, \dots, U_k von $\mathcal{P}(V)$ bezeichnet $\langle U_1, U_2, \dots, U_k \rangle$ den Unterraum $\mathcal{P}(\langle U_1, U_2, \dots, U_k \rangle)$. Dies wird gelegentlich mit $U_1 U_2 \dots U_k$ abgekürzt.

Für endlichdimensionale projektive Räume gilt für zwei Unterräume U und W die **Dimensionsformel**

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

Analog zu **Faktorräumen** von Vektorräumen werden zu zwei Unterräumen U und W mit $W \subseteq U$ die Quotientengeometrie U/W definiert, die ein projektiver Raum der Dimension $\dim(U) - \dim(W) - 1$ ist.

Ein **Kegel** C mit **Spitze** S mit S Unterraum und einer **Basis** B aus Punkten ist die Menge

$$C := \bigcup_{P \in B} \langle P, S \rangle.$$

An Stelle des Kegels C betrachtet man auch oft die Quotientengeometrie C/S .

In dieser Arbeit interessieren nur projektive Räume über endlichen Vektorräumen. Der projektive Raum der Dimension n über dem Körper $\text{GF}(q)$ wird mit $\text{PG}(n, q)$ bezeichnet.

Der Vektorraum von $n+1$ über $\text{GF}(q)$ hat $q^{n+1} - 1$ Vektoren $v \neq 0$. Von diesen Vektoren spannen jeweils $q - 1$ denselben eindimensionalen Vektorraum auf. Der

projektive Raum $\text{PG}(n, q)$ hat also

$$\theta_n^q := \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$$

Punkte. Setze $\theta_{-1}^q := 0$. Ist q aus dem Kontext klar, wird θ_n^q auch mit θ_n abgekürzt.

Für $a \geq b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} q^{a-b}\theta_b + \theta_{a-b-1} &= q^{a-b}(q^b + q^{b-1} + \dots + 1) + \theta_{a-b-1} \\ &= q^a + q^{a-1} + \dots + q^{a-b} + \theta_{a-b-1} = \theta_a. \end{aligned}$$

Zum Rechnen mit θ_n ist die hieraus resultierende Gleichung

$$\theta_a = q^{a-b}\theta_b + \theta_{a-b-1}$$

gelegentlich nützlich. Ebenso gilt für $e \in \mathbb{N}$

$$\theta_{a-1}^{q^e} \theta_{e-1}^q = \theta_{ae-1}^q.$$

1.2 Polarräume & Quadriken

Eine **Korrelation** α von $\text{PG}(n, q)$ mit $n \geq 2$ ist eine Permutation der Menge aller Unterräume von $\text{PG}(n, q)$ mit

$$U \subseteq V \implies V^\alpha \subseteq U^\alpha$$

für Unterräume U und V . Eine **Polarität** ist eine Korrelation, die $\alpha^2 = \text{id}$ erfüllt.

Ein Unterraum U liegt in einer Polarität, d.h. er ist **total isotrop**, falls $U \subseteq U^\alpha$ gilt. Er heißt **anisotrop**, falls $U \cap U^\alpha$ leer ist. Der Unterraum U heißt **Erzeuger**, wenn er total isotrop und maximal ist. Man kann zeigen, dass alle Erzeuger die gleiche Dimension haben. Die Menge der Erzeuger eines Polarraums \mathbb{P} wird mit $\Sigma\mathbb{P}$ bezeichnet.

Der Unterraum V steht senkrecht auf U , falls $V \subseteq U^\alpha$ gilt. Für gewöhnlich schreibt man \perp statt α . Es gilt

$$U^\alpha \cap V^\alpha = (UV)^\alpha$$

und

$$(U \cap V)^\alpha = U^\alpha V^\alpha.$$

Eine Polarität von $\text{PG}(n, q)$ lässt sich durch eine **reflexive σ -Sesquilinearform** s beschreiben, wobei σ ein Automorphismus von $\text{GF}(q)$ ist. Eine σ -Sesquilinearform ist eine Abbildung $V \times V \rightarrow \text{GF}(q)$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} s(kv, lw) &= ks(v, w)l^\sigma \text{ und} \\ s(v + v', w + w') &= s(v, w) + s(v, w') + s(v', w) + s(v', w'). \end{aligned}$$

Die Form s heißt reflexiv, wenn $s(v, w) = 0$ äquivalent zu $s(w, v) = 0$ ist.

Eine Sesquilinearform lässt sich wiederum durch eine $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix $A = (a_{ij})$ und einen zugehörigen Automorphismus σ beschreiben, indem man $a_{ij} := s(v_i, v_j)$ für eine Basis $\{v_0, \dots, v_n\}$ setzt. Dann liegt ein Punkt $\langle v \rangle$ von $\text{PG}(n, q)$ in einer Polarität \mathbb{P} genau dann, wenn

$$v^t A v^\sigma = 0$$

bzw. $s(v, v) = 0$ gilt und zwei Punkt $\langle v \rangle, \langle w \rangle$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn

$$w^t A v^\sigma = 0$$

bzw. $s(v, w) = 0$ gilt. Eine Form heißt **ausgeartet**, wenn ein Punkt existiert, der auf allen anderen Punkten des projektiven Raums senkrecht steht. Der Unterraum, der auf einem Punkt U senkrecht steht, wird mit U^\perp bezeichnet. Eine Hyperebene heißt **ausgeartet**, wenn sie der Senkrechttraum eines Punktes ist. Ansonsten heißt sie **nicht-ausgeartet**.

Es gibt vier wichtige Eigenschaften von σ -Sesquilinearformen. Gilt für alle $v, w \in V$

- $\sigma = 1$ und $s(v, w) = s(w, v)$, so ist s symmetrisch.
- $\sigma = 1$ und $s(v, w) = -s(w, v)$, so ist s schiefsymmetrisch.
- $\sigma = 1$ und $s(v, v) = 0$, so ist s symplektisch.

- $\sigma \neq 1 = \sigma^2$ und $s(v, w) = s(w, v)^\sigma$, so ist s hermitesch.

Die Darstellungsmatrizen der Formen sind jeweils symmetrisch, schiefsymmetrisch, symplektisch bzw. hermitesch. Wegen $0 = s(v+w, v+w) = s(v, w) + s(w, v)$ ist jede symplektische Form auch schiefsymmetrisch. Umgekehrt ist jede schiefsymmetrische Form symplektisch, falls die Charakteristik des zugrundeliegenden Körpers ungleich 2 ist, da dann aus $s(v, v) = -s(v, v)$ die Gleichung $s(v, v) = 0$ folgt.

Man beachte, dass s symmetrisch, schiefsymmetrisch oder hermitesch jeweils s reflexiv impliziert, da aus $0 = s(v, w) = s(w, v)$, $0 = s(v, w) = -s(w, v)$ und $0 = s(v, w) = s(w, v)^\sigma$ jeweils $s(w, v) = 0$ folgt.

Man kann zeigen, dass jede Polarität durch eine symmetrische, schiefsymmetrische oder hermitesche Form s dargestellt werden kann.

Ist s symplektisch, so ist n ungerade und man bezeichnet die zugehörige symplektische Polarität mit $W(2r - 1, q)$ für $n = 2r + 1$. Erzeuger haben den Rang r und bzgl. einer geeigneten Basis $\{v_0, \dots, v_n\}$ gilt

$$s\left(\sum x_i v_i, \sum y_i v_i\right) = (x_0 y_1 - x_1 y_0) + \dots + (x_{d-1} y_d - x_d y_{d-1}).$$

Offensichtlich ist jeder Punkt des projektiven Raums, in dem die Polarität lebt, total isotrop.

Ist s hermitesch, so bezeichnet man die zugehörige Polarität mit $H(n, q)$ bzw. $H(2r - 1, q)$ und $H(2r, q)$, wobei q ein Quadrat ist. Erzeuger haben den Rang r und bzgl. einer geeigneten Basis $\{v_0, \dots, v_n\}$ gilt

$$s\left(\sum x_i v_i, \sum y_i v_i\right) = x_0 y_0^\sigma + \dots + x_n y_n^\sigma.$$

Ein Unterraum von $\text{PG}(n, q)$ ist genau dann total isotrop, wenn alle seine Punkte zu $H(n, q)$ gehören. Eine Gerade trifft $H(n, q)$ entweder in 0, 1, $\sqrt{q} + 1$ oder $q + 1$ Punkten. In $\text{PG}(2, q)$ entspricht $H(2, q)$ einer Baerunterebene.

Es fehlen noch die **Quadriken** $Q^+(2r - 1, q)$, $Q(2r, q)$ und $Q^-(2r + 1, q)$, die mit Ausnahme von $Q(2r, q)$ für gerade q die zu symmetrischen s gehörenden Polaritäten sind. Geraden schneiden die Quadriken in 0, 1, 2 oder $q + 1$ Punkten. Quadriken werden durch quadratische Formen $Q_\kappa : \text{GF}(q)^{n+1} \rightarrow \text{GF}(q)$ beschrieben (d.h. für $\lambda \in \text{GF}(q)$ gilt $Q_\kappa \lambda = \lambda^2 Q_\kappa$ und es gibt eine begleitende Bilinear, so dass für alle $v, w \in \text{GF}(q)^{n+1}$ gilt: $Q_\kappa(v + w) = Q_\kappa(v) + Q_\kappa(w) - 2\kappa(v, w)$).

Die Formen können wie folgt gewählt werden:

- $x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$ für $Q^+(n, q)$.
- $x_0^2 + ax_0x_1 + cx_1^2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$ für $Q^-(n, q)$, wobei $x^2 + ax + c$ ein über $\text{GF}(q)$ irreduzibles Polynom ist.
- $x_0^2 + x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n$ für $Q(n, q)$.

Sei \mathbb{P} eine Polarität in $\text{PG}(n, q)$. Ist $P \in \mathbb{P}$, so ist $P^\perp \cap \mathbb{P}$ ein Kegel mit P als Spitze und einem Polarraum vom selben Typ wie \mathbb{P} in $\text{PG}(n-2, q)$ als Basis. Zudem kennt man die Schnitzzahlen der Tangenten und Sekanten der verschiedenen Polarräume. Per Induktion ermöglicht dies die Anzahl der Punkte und Erzeuger eines Polarraums zu berechnen:

Der $W(1, q)$ hat $q+1$ Erzeuger. Zu zeigen ist $|\Sigma W(2r-1)| = (q+1)(q^2+1)\dots(q^r+1)$. Der $W(2r-1, q)$ hat θ_{2r+1} Punkte. Ein Erzeuger von $W(2r-1, q)$ enthält θ_{r-1} Punkte und jeder Punkt liegt auf $|\Sigma W(2r-3, q)|$ Erzeugern. Dies liefert die Behauptung:

$$|\Sigma W(2r-1, q)| = \theta_{2r-1} |\Sigma W(2r-3, q)| / \theta_{r-1} = (q^r+1) |\Sigma W(2r-3, q)|.$$

Analog kann man diese Zahlen für die anderen Polarräume berechnen. In 2.3 finden sich die entsprechenden Zahlen. Für eine Herleitung sei auf die genannten Quellen verwiesen.

1.3 Stark reguläre Graphen

Ein **Graph** $\Gamma = (V, \sim)$ ist eine Tupel, das aus einer **Knotenmenge** V und einer **Kantenmenge** $\sim \subseteq V \times V$ besteht. Zwei Knoten x, y heißen **benachbart** oder **adjazent** (auch: x ist der **Nachbar** von y), wenn $(x, y) \in \sim$ gilt. Der **Abstand** $\delta(x, y)$ von zwei Knoten x und y ist als die minimale Anzahl an Kanten der Form $(x, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \dots, (\alpha_d, y)$ definiert. Ein Graph heißt **ungerichtet**, wenn $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ für alle Knoten x, y des Graphens gilt.

Für diese Arbeit sind stark reguläre Graphen von Interesse. Ein **stark regulärer Graph** mit Parametern (N, k, λ, μ) ist ein ungerichteter Graph, für den gilt:

- $|V| = N$, d.h. es gibt N Knoten.
- Jeder Knoten hat k Nachbarn.
- Zwei benachbarte Knoten haben λ gemeinsame Nachbarn.
- Zwei nicht benachbarte Knoten haben μ gemeinsame Nachbarn.

Bezeichne mit $\Gamma(x)$ die Nachbarn von x in Γ .

Lemma 1.3.1. *Für einen stark regulären Graphen mit den Parametern (N, k, λ, μ) gilt*

$$k(k - \lambda - 1) = (N - k - 1)\mu.$$

Beweis. Zähle Knotenpaare $(x, y) \in V \times V$ mit $x \in \Gamma(z)$ und $y \notin \Gamma(z) \cup \{z\}$ für einen festen Knoten z . Es gibt k Möglichkeiten, x zu wählen. Für y verbleiben dann $|\Gamma(x) \setminus (\Gamma(z) \cup \{z\})| = k - \lambda - 1$ Möglichkeiten. Umgekehrt gibt es $N - k - 1$ Möglichkeiten, eine nicht mit z benachbarten Knoten zu wählen. Dann verbleiben μ Möglichkeiten, einen gemeinsamen Nachbarn von y und z zu wählen. \square

Hat der Γ die Knotenmenge x_1, x_2, \dots, x_N , kann man die $N \times N$ **Adjazenzmatrix** $(a_{ij}) = A$ des Graphen Γ mit

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } x_i, x_j \text{ adjazent.} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

betrachten. In A^2 entspricht dann der (i, j) -te Eintrag der Anzahl der Knoten, die mit x_i und x_j adjazent sind. Dabei treten nach der Definition eines stark regulären Graphen drei Fälle auf:

- $i = j$: mit x_i sind k Knoten adjazent.
- $i \neq j$, x_i, x_j adjazent: λ gemeinsame Nachbarn.
- $i \neq j$, x_i, x_j nicht adjazent: μ gemeinsame Nachbarn.

Bezeichnet J die $N \times N$ -Matrix, für die jeder Eintrag 1 ist, so gilt also

$$A^2 = kE + \lambda A + \mu(J - E - A)$$

bzw.

$$A^2 = (k - \mu)E + (\lambda - \mu)A + \mu J. \quad (1.3.2)$$

Ist j der Vektor mit jedem Eintrag 1, so folgt daraus, dass jeder Knoten k Nachbarn hat, die Gleichung

$$Aj = kj$$

erfüllt und damit j ist ein Eigenvektor von A . Die Matrix A ist symmetrisch und somit diagonalisierbar. Jeder weitere Eigenvektor von A steht damit auf j und damit J senkrecht. Dies liefert für weitere Eigenwerte ρ von A die Bedingung

$$\rho^2 = (k - \mu) + (\lambda - \mu)\rho.$$

Diese Gleichung liefert als Eigenwerte e^+, e^- von Γ mit $e^+ > 0 > e^-$ die Werte

$$e^+, e^- = \frac{1}{2} \left((\lambda - \mu) \pm \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)} \right).$$

Nun gilt

$$(A - e^+E)(A - e^-E) = \alpha J$$

für ein α . Dies liefert zusammen mit 1.3.2 die Gleichung

$$-e^+e^-E + (e^- + e^+)A + \alpha J = A^2 = (k - \mu)E + (\lambda - \mu)A + \mu J.$$

Es folgt $\alpha = \mu$ sowie

$$e^+e^- = \mu - k \text{ und } e^+ + e^- = \lambda - \mu \quad (1.3.3)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}(k - e^+)(k - e^-) &= k^2 - k(e^+ + e^-) + e^+ + e^- \\ &= k^2 - k(\lambda - \mu) + \mu - k \\ &= k(k - \lambda - 1) + \mu(1 - k) = \mu N.\end{aligned}$$

Also gilt

$$N\mu = (k - e^-)(k - e^+).$$

Haben e^- und e^+ die Vielfachheiten f^- und f^+ , so gilt

$$\begin{aligned}N &= f^+ + f^- + 1 \\ 0 &= \text{Spur}(A) = k + f^+e^+ + f^-e^-\end{aligned}$$

und hiermit lassen sich, da $\sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 4(k - \mu)} > 0$ gilt, f^+ und f^- berechnen:

$$f^+, f^- = \frac{1}{2} \left(n - 1 \pm \frac{(n - 1)(\mu - \lambda) - 2k}{\sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 4(k - \mu)}} \right).$$

Da f^+ und f^- natürliche Zahlen sind, liefert diese Gleichung Bedingungen an n, k, λ und μ . Ebenso lässt sich durch eine elementare Rechnung zeigen, dass e^+ und e^- ebenso ganze Zahlen sind, falls $(n - 1)(\mu - \lambda) - 2k \neq 0$ gilt.

Gilt hingegen $(n - 1)(\mu - \lambda) - 2k = 0$, so handelt es sich um einen so genannten **Konferenzgraphen**. Diese Gleichung lässt sich zu

$$n = 1 + \frac{2k}{\mu - \lambda} > 1 + k$$

umstellen, was $0 < \mu - \lambda < 2$ zeigt. Es gilt also $\mu - \lambda = 1$. Damit hat der Graph die Parameter $\lambda = \mu - 1$, $k = 2\mu$ und $n = 4\mu + 1$. Van Lint und Seidel zeigten 1966 für solche Graphen, dass die Anzahl ihrer Knoten n die Summe von zwei Quadratzahlen sein muss. Eine einfache Rechnung zeigt, dass e^+ und e^- in diesem Fall nur dann ganzzahlig sind, falls n ungerade und ein Quadrat ist. Die Existenz dieser Graphen hängt mit der Existenz von Hadamardmatrizen ab (siehe [6]).

Eine **Clique** ist eine Knotenmenge \mathcal{T} , in der jeder Knoten mit jedem anderen Knoten aus \mathcal{T} adjazent ist. Eine Clique \mathcal{T} heißt **Maximumsclique**, wenn für jede

Clique \mathcal{T}' des Graphens $|\mathcal{T}'| \leq |\mathcal{T}|$ gilt. Eine Clique heißt **α -regulär**, wenn jeder Knoten nicht aus \mathcal{T} mit genau α Knoten aus \mathcal{T} adjazent ist. In [25] (und auch hier in Kapitel 2*) wird gezeigt, dass für α -reguläre Cliques folgende Aussage gilt:

Lemma 1.3.4. *Sei \mathcal{T} eine α -reguläre Clique eines stark regulären Graphen. Dann gilt*

$$|\mathcal{T}| = 1 - k/e^-$$

und

$$\alpha = \frac{-\mu}{e^-}.$$

Zudem ist \mathcal{T} eine *Maximumsclique*.

Eine **Coclique** ist eine Knotenmenge \mathcal{O} paarweiser nicht-adjazenter Knoten. Eine Coclique heißt **Maximumscoclique**, falls keine Coclique des Graphen größer als sie ist. Eine Coclique heißt **α -regulär**, wenn jeder Knoten nicht aus \mathcal{O} mit genau α Knoten aus \mathcal{O} adjazent ist. Nun gilt nach [6], S. 91, (und auch hier in Kapitel 2) analog zum vorhergehenden Lemma

Lemma 1.3.5. *Sei \mathcal{O} eine α -reguläre Coclique eines stark regulären Graphen. Dann gilt*

$$|\mathcal{O}| = \frac{-Ne^-}{(k - e^-)}$$

und

$$\alpha = -e^-.$$

Die beiden erwähnten Lemmata sind auch als Hoffmanschranke bekannt. Diese Arbeit stellt eine Verallgemeinerung von regulären Cliques und regulären Cocliques in Polarräumen vor. Der Spezialfall der Hoffmanschranke wird im Folgenden nebenbei bewiesen.

*Die Quelle [25] hat wie einige andere Quellen (u.a.) die Funktion, einen historischen Kontext für das Thema der Arbeit zu geben. Solche Veröffentlichungen zu Cliques und Cocliques finden sich gehäuft Anfang der 1980er.

2 Elementare Eigenschaften der Intriguing Sets

Dieser Abschnitt soll den Begriff der Intriguing Sets einführen und motivieren. In Abschnitt 2.1 werden **Knotenmengen** M stark regulärer Graphen betrachtet. Es lässt sich für die durchschnittliche Anzahl der in M adjazenten Knoten eine obere und eine untere Schranke finden. Die Knotenmengen, die diese Schranke annehmen, motivieren in Abschnitt 2.2 die Definition von Intriguing Sets. Letztendlich werden in Abschnitt 2.3 bestimmte Intriguing Sets vorgestellt.

2.1 Knotenmengen stark regulärer Graphen

Sei $\Gamma = (V, \sim)$ ein stark regulärer Graph mit den Parametern (N, k, λ, μ) und $A \in \mathbb{C}^{N, N}$ seine Adjazenzmatrix. Sei $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Wir betrachten die Menge $M := \{v \in V \mid f(v) \neq 0\}$. Bezeichne $a := \sum_{v \in V} f(v)^2$ und $c := (\sum_{v \in V} f(v)) / N$. Seien e^+ und e^- die beiden Eigenwerte von A mit $e^+, e^- \neq k$ und $e^+ > 0 > e^-$.

Wenn $V^0 = \langle j \rangle$, V^+ und V^- die Eigenräume zu den Eigenwerten k, e^+ und e^- sind, kann man schreiben

$$\mathbb{C}^N = V^0 \oplus V^+ \oplus V^-.$$

Betrachte f im Folgenden als Vektor von \mathbb{C}^N .

Satz 2.1.1. *Es gilt:*

(a)

$$c^2 N k + (a - c^2 N) e^- \leq \sum_{\substack{(x, y) \in M \\ x \sim y}} f(x) f(y) \leq c^2 N k + (a - c^2 N) e^+$$

(b) Gleichheit auf einer Seite von (a) gilt genau dann, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt,

so dass für alle $x \in V$

$$\sum_{\substack{y \in M \\ y \sim x}} f(y) = e^\epsilon f(x) + b$$

gilt. Zudem ist $b = c(k - e^\epsilon)$ für $\epsilon \in \{-, +\}$.

(c) Gleichheit auf der linken bzw. rechten Seite von (a) gilt genau dann, wenn ein $b \in \mathbb{C}$ und ein $v^\epsilon \in V^\epsilon$ mit $\epsilon = -$ bzw. $\epsilon = +$ existiert mit

$$Af = e^\epsilon v^\epsilon + bj \in V^0 \oplus V^\epsilon.$$

(d) Ist $f \in V^0 \oplus V^\epsilon$, so gilt $(f, j) = Nc = \frac{bN}{k - e^\epsilon}$ mit b wie in (b) und (c).

Beweis. Betrachtet man f als Vektor von M , so kann man f schreiben als $f = c'j + v^+ + v^-$ mit $v^+ \in V^+$ und $v^- \in V^-$ sowie $c' \in \mathbb{R}$. Bezeichne den i -ten Eintrag eines Vektors v mit v_i . Da v^- und v^+ auf j senkrecht stehen, ist $\sum v_i^+ = \sum v_i^- = 0$. Wegen $\sum f_i = cN$ ist $c' = c$.

Entsprechend folgt

$$a = |f|^2 = f^t f = c^2 |j|^2 + |v^+|^2 + |v^-|^2 = c^2 N + |v^+|^2 + |v^-|^2.$$

Also ist $|v^+|^2 + |v^-|^2 = a - c^2 N$. Auch gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(x,y) \in M \\ x \sim y}} f(x)f(y) &= f^t Af = c^2 j^t Aj + v^{+t} Av^+ + v^{-t} Av^- \\ &= c^2 Nk + e^+ |v^+|^2 + e^- |v^-|^2. \end{aligned}$$

Aus $|v^\epsilon|^2 \geq 0$ für $\epsilon \in \{-, +\}$ folgen (a) und (c).

Zu (b): Sei nun die Schranke auf einer Seite mit Gleichheit erfüllt, also $f = cj + v^\epsilon$. Dann gilt

$$Af = A(cj + v^\epsilon) = e^\epsilon f + c(k - e^\epsilon)j.$$

Andererseits erfüllt $\sum_{\substack{y \in M \\ y \sim x}} f(y)$ genau dann die Gleichung in (b), wenn es ein

b gibt mit

$$Af = e^\epsilon f + bj.$$

Der Vektor $(e^\epsilon - k)f + bj$ ist dann ein Eigenvektor zum Eigenwert e^ϵ , denn

$$\begin{aligned} A((e^\epsilon - k)f + bj) &= e^\epsilon(e^\epsilon - k)f + (e^\epsilon - k)bj + bkj \\ &= e^\epsilon[(e^\epsilon - k)f + bj]. \end{aligned}$$

Gibt es also ein solches b , folgt daraus, dass v in $(V^\epsilon)^\perp$ für ein ϵ liegt und somit nach (c) die Gleichung erfüllt. Damit gilt (b).

Es ist $(e^\epsilon - k)f + bj \in V^\epsilon$, also gilt

$$0 = ((e^\epsilon - k)f + bj, j) = (e^\epsilon - k)(f, j) + bN.$$

Es folgt (d):

$$(f, j) = \frac{bN}{k - e^\epsilon}.$$

□

Ist $f(V) \subseteq \{0, 1\}$, so ist f die **charakteristische Funktion einer Menge** M . Dann gilt insbesondere $a = cN$. Wenn aber $a = cN$ gilt, vereinfacht sich die Ungleichung in Satz 2.1.1. Falls $\text{Bild}(f) \subseteq \mathbb{Z}$ gilt, ist die Bedingung $a = cN$ äquivalent zu f ungewichtet.

Korollar 2.1.2. *Ist $a = cN$, so gilt*

(a)

$$a^2k + a(N - a)e^- \leq N \sum_{x \sim y} f(x)f(y) \leq a^2k + a(N - a)e^+.$$

(b) *Eine maximale Clique hat maximal $1 - k/e^-$,
eine maximale Coclique $-Ne^-/(k - e^-)$ Elemente.*

Beweis. Nur (b) ist zu zeigen. Für eine Clique gilt $|\{(x, y) \in M \times M \mid x \sim y\}| = a(a - 1)$. Aus (a) folgt damit die Ungleichung

$$\frac{a^2 k}{N} + \frac{a(N - a)}{N} e^+ \geq a(a - 1).$$

Dies vereinfacht sich zu

$$a \leq \frac{N(e^+ + 1)}{N - k + e^+}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{N(e^+ + 1)}{N + e^+ - k} &= \frac{(k - e^+)(k - e^-)(e^+ + 1)}{(k - e^+)(k - e^-) + e^+ \mu - k \mu} \\ &= \frac{(k - e^-)(k - e^+)(e^+ + 1)}{(k - e^+)(k - e^-) + e^+(k + e^+ e^-) - k(k + e^+ e^-)} \\ &= \frac{(k - e^-)(k - e^+)(e^+ + 1)}{-e^-(k - e^+)(e^+ + 1)} = 1 - k/e^-. \end{aligned}$$

Für eine Coclique gilt $|\{(x, y) \in M \times M \mid x \sim y\}| = 0$ und aus

$$\frac{a^2 k}{N} + \frac{a(N - a)}{N} e^+ \geq 0$$

folgt der zweite Teil der Behauptung. \square

Damit wurden die in der Einleitung genannten Hoffmannschränken bewiesen.

2.2 Intriguing Sets

Der Begriff der **Intriguing Sets** wurde in [4] für verallgemeinerte Vierecke eingeführt. Als **gewichtetes Intriguing Set** wird eine Knotenmengen \mathcal{I} mit seiner zugehörigen Funktion f bezeichnet, die in Satz 2.1.1 Gleichheit auf der linken oder rechten Seite annimmt (d.h. $f \in (V^\epsilon)^\perp$ für ein $\epsilon \in \{-, +\}$) sowie $\text{Bild}(f) \subseteq \mathbb{Z}$ gilt. Da es wünschenswert ist, dass e^- und e^+ ganze Zahlen sind, werden im Folgenden nur stark reguläre Graphen Γ betrachtet, die keine Konferenzgraphen sind oder für die N kein Quadrat ist. Siehe [9], Kapitel 2, für Details.

Lemma 2.2.1. *Sei \mathcal{T} ein gewichtetes Intriguing Set mit Gewichtsfunktion f mit $Af = c^+j + v^+$ mit $v^+ \in V^+$ und \mathcal{O} ein gewichtetes Intriguing Set mit Gewichtsfunktion g mit $Ag = c^-j + v^-$ mit $v^- \in V^+$. Dann gilt*

$$(f, g) = c^+c^-N = \frac{(g, j)(f, j)}{N}.$$

Für Intriguing Sets gilt insbesondere

$$|\mathcal{T} \cap \mathcal{O}| = \frac{|\mathcal{T}||\mathcal{O}|}{N}.$$

Beweis. Es gilt

$$(f, g) = (c^+j + v^+)^t(c^-j + v^-) = c^+c^-j^tj = c^+c^-N$$

und dies ist genau die Behauptung. □

2.2.1 x -Tight Sets

Definition 2.2.2. *Ein gewichtetes Intriguing Set \mathcal{T} heißt x -Tight Set (oder kurz: Tight Set), wenn f in $(V^-)^\perp$ liegt und*

$$Af = e^+f + x \frac{\mu}{-e^-}j$$

für ein $x \in \mathbb{Z}$ gilt.

Man beachte, dass $x \frac{\mu}{-e^-} = c(k - e^+)$ gilt.

Die Motivation für $x \in \mathbb{Z}$ statt z.B. $x \in \mathbb{R}$ liegt darin, dass weiterhin eine geometrische Interpretation von Intriguing Sets möglich bleiben soll. Kann es Punkte beliebig kleinen Gewichts geben, geht eine solche Interpretation im Sinne endlicher Geometrie verloren. Die Existenzfrage von x -Tight Sets zu einem bestimmten x wird schon für $x \in \mathbb{Z}$ trivial. Eine weitere Verallgemeinerung erscheint hier also nicht hilfreich.

Nach 2.1.1 gilt

$$(f, j) = x \frac{N\mu}{-e^-(k - e^+)} = x(1 - k/e^-).$$

Reguläre Cliques von Γ sind natürliche Beispiele für 1-Tight Sets, da jeder Knoten außerhalb einer regulären Clique \mathcal{C} mit $-\mu/e^-$ Knoten aus \mathcal{C} adjazent ist. Die Vereinigung disjunkter regulärer Cliques von Γ ist ein Beispiel für x -Tight Sets. Allgemeiner gilt, dass die Summe von einem x -Tight Set und einem y -Tight Set ein $(x+y)$ -Tight Set ist.

Liegt ein Knoten P in M , ist er mit $e^+f(P) + x\frac{\mu}{-e^-}$ Punkten aus M durch eine Kante verbunden. Liegt ein Knoten nicht in M , ist er mit $x\frac{\mu}{-e^-}$ Knoten aus M verbunden. Nach diesen Zahlen sehen gewichtete x -Tight Sets immer wie die Summe regulärer Cliques aus. Für gewichtete Tight Sets ist dies, wie später zu sehen sein wird, häufig der Fall. Im ungewichteten Fall kommt es vor, dass x -Tight Sets nicht die Vereinigung von disjunkten regulären Cliques sind.

2.2.2 m -Ovoids

Definition 2.2.3. *Ein gewichtetes Intriguing Set \mathcal{O} heißt gewichtetes m -Ovoid, wenn f in $(V^+)^\perp$ liegt und*

$$Af = e^-f - me^-j$$

für ein $m \in \mathbb{Z}$ gilt.

Ein 1-Ovoid wird auch Ovoid genannt.

Nach 2.1.1 gilt

$$(f, j) = \frac{-me^-N}{k - e^-}.$$

Analog zu x -Tight Sets sind **reguläre Cocliquen** und Vereinigungen disjunkter regulärer Cocliquen natürliche Beispiele für m -Ovoids. Die Summe eines m - und eines m' -Ovoids ergibt analog zu Tight Sets einen $(m+m')$ -Ovoid.

Ein Intriguing Set, Tight Set bzw. Ovoid ist ein gewichtetes Intriguing Set, gewichtetes Tight Set bzw. ein gewichteter Ovoid mit $f(V) \in \{0, 1\}$. Lemma 2.2.1 wird für x -Tight Sets und m -Ovoids besonders schön, denn dann gilt:

Korollar 2.2.4. *Sei \mathcal{O} ein gewichteter m -Ovoid und \mathcal{T} ein gewichtetes x -Tight Set mit den zugehörigen Funktionen f und g . Dann gilt*

$$(f, g) = mx.$$

Beweis. Nach Satz 2.1.1 (c) und $\mu N = (k - e^+)(k - e^-)$ gilt

$$(f, j) = \frac{-mNe^-}{k - e^-}$$

und

$$(g, j) = \frac{xN\mu}{-e^-(k - e^+)}.$$

Also folgt aus Lemma 2.2.1

$$(f, g) = \frac{(g, j)(f, j)}{N} = \frac{mxN\mu}{(k - e^+)(k - e^-)} = mx.$$

□

Nun stellt sich die Frage, ob alle Intriguing Sets Ovoide oder Tight Sets sind. In Polarräumen ist dies der Fall. Dieser Sachverhalt wird in dem Rest dieses Abschnittes allgemeiner aufgeschrieben.

Lemma 2.2.5. *Sei \mathcal{I} ein gewichtetes Intriguing Set mit Gewichtsfunktion f und wie in 2.1.1 ist $c = \sum_{v \in V} f(v)/N$.*

(a) *Ist \mathcal{I} aus $(\mathcal{V}^+)^\perp$ und existiert ein gewichtetes 1-Tight Set \mathcal{T} in Γ , so ist \mathcal{I} ein m -Ovoid mit*

$$m = \left(1 - \frac{k}{e^-}\right) c.$$

(b) *Ist \mathcal{I} aus $(\mathcal{V}^-)^\perp$ und existiert ein gewichteter 1-Ovoid \mathcal{O} in Γ , so ist \mathcal{I} ein x -Tight Set mit*

$$x = \frac{-Ne^-}{k - e^-} c.$$

Beweis.

(a) Für die zu \mathcal{T} und \mathcal{I} gehörenden Funktionen f und g gilt wie in 2.2.4 $(f, g) = m$ für $m \in \mathbb{R}$ mit $Ag = e^-g - me^-j$. Nach 2.2.1 ist

$$(f, g) = \frac{|\mathcal{T}||\mathcal{I}|}{N} \in \mathbb{Z}.$$

Damit ist $m \in \mathbb{Z}$ und somit \mathcal{I} ein Intriguing Set. Mit $|\mathcal{T}| = 1 - k/e^-$ und $|\mathcal{I}| = cN$ folgt $m = (1 - k/e^-)c$.

(b) Analog zu (a) ist $(f, g) = x$ mit $Af = e^+f + x\frac{\mu}{e^-}$. Nach 2.2.1 ist

$$(f, g) = \frac{|\mathcal{O}||\mathcal{I}|}{N} \in \mathbb{Z}.$$

Damit ist $x \in \mathbb{Z}$ und somit \mathcal{I} ein Intriguing Set. Mit $|\mathcal{O}| = \frac{-me^-N}{k - e^-}$ und $|\mathcal{I}| = cN$ folgt $x = \frac{-Ne^-}{k - e^-}c$.

□

Es gibt für den Fall $\mu/e^i \in \mathbb{Z}$ das folgende Beispiel für einen gewichteten $\frac{\mu}{-e^-}$ -Ovoiden. Betrachte hierfür einen Knoten P des Graphen und die Gewichtsfunktion $f : V \rightarrow \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} f(Q) &= 1, \text{ falls } P \sim Q \\ f(P) &= \mu + e^- - \lambda = -e^+ \\ f(Q) &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Ein Punkt Q mit $Q \approx P$ und P sind zu μ Punkten gemeinsam adjazent. Ein Punkt Q mit $Q \sim P$ und P sind zu λ Punkten gemeinsam adjazent. Da P Gewicht $\mu + e^- - \lambda$ hat, ist Q also gewichtet zu $\mu + e^-$ Punkten adjazent. Der Punkt P ist zu $k = \mu - e^+e^-$ Punkten adjazent. Also gilt $Af = e^-f + \mu j$. Damit handelt es sich um ein Intriguing Set mit negativen Eigenwert. Es folgt mit Lemma 2.2.5:

Korollar 2.2.6. *Ist $\mu/e^- \in \mathbb{Z}$, so ist f ein $-\frac{\mu}{e^-}$ -Ovoid.*

Korollar 2.2.7. *Ist $-\mu/e^- \in \mathbb{Z}$ und*

$$ggT(-\mu/e^-, 1 - k/e^-) = 1,$$

so ist jedes Intriguing Set aus $(V^-)^\perp$ ein x -Tight Set.

Beweis. Es ist vorausgesetzt, dass $-\mu/e^-$ eine ganze Zahl ist. Aus $e^-e^+ = k + \mu$ folgt, dass auch k/e^- eine ganze Zahl ist.

Sei \mathcal{T} ein Intriguing Set aus $(V^-)^\perp$ mit $|\mathcal{T}| = x(1 - k/e^-) \in \mathbb{Z}$ und \mathcal{O} ein $-\frac{\mu}{e^-}$ -Ovoid. Dann gilt

$$|\mathcal{O} \cap \mathcal{T}| = -x \frac{\mu}{e^-} \in \mathbb{Z}.$$

Aus $\text{ggT}(-\mu/e^-, 1 - k/e^-) = 1$ folgt mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus $x \in \mathbb{Z}$, also die Behauptung. \square

2.3 Verbindungen zu geometrischen Strukturen

Diese Arbeit möchte Ergebnisse über x -Tight Sets und m -Ovoids in speziellen Geometrien, insbesondere endlichen Polarräumen, untersuchen.

2.3.1 Polarräume

Sei \mathbb{P} ein Polarraum. Dann ist für alle Punkte $P, Q \in \mathbb{P}$

- $k := |P^\perp \cap \mathbb{P}|$ konstant.
- $\lambda := |P^\perp \cap Q^\perp|$ konstant für PQ total isotrop.
- $\mu := |P^\perp \cap Q^\perp|$ konstant für PQ nicht total isotrop.

Entsprechend ist \mathbb{P} ein stark regulärer Graph mit den Parametern $(|\mathbb{P}|, k, \lambda, \mu)$. Diese Werte lassen sich für alle Polarräume leicht ausrechnen. Definiere ϑ_r für einen Polarraum folgendermaßen:

Polarraum \mathbb{P}	$W(2r-1, q)$	$H(2r-1, q^2)$	$H(2r, q^2)$	$Q^+(2r-1, q)$	$Q(2r, q)$	$Q^-(2r+1, q)$
$\vartheta_r, \vartheta_{\mathbb{P}}$	$ q^r + 1 $	$ q^{2r-1} + 1 $	$ q^{2r+1} + 1 $	$ q^{r-1} + 1 $	$ q^r + 1 $	$ q^{r+1} + 1 $

Der Rang des Polarraums ist jeweils $r - 1$. Für $r = 1$ sind also die Erzeuger jeweils nur Punkte. Sollte aus dem Kontext klar sein, welchen Typ \mathbb{P} hat, schreibe ϑ_r statt $\vartheta_{\mathbb{P}}$. Die Zahl $\vartheta_{\mathbb{P}}$ ist die Größe eines Ovoids, einer Faserung oder – allgemeiner – eines m -Systems des entsprechenden Polarraums (siehe 3.5 für Details).

Mit ϑ_r lässt sich einfach rechnen, denn für einen Polarraum \mathbb{P} über $\text{GF}(q)$ gilt

$$\vartheta_a = q^b \vartheta_{a-b} - q^b + 1.$$

Lemma 2.3.1. *Hat \mathbb{P} Rang r , so gilt des Weiteren mit $N = |\mathbb{P}|$*

$$\begin{aligned} N &= \vartheta_r \frac{q^r - 1}{q - 1} = \vartheta_r \theta_{r-1} \\ k &= q \frac{q^{r-1} - 1}{q - 1} \vartheta_{r-1} = q \theta_{r-2} \vartheta_{r-1} \\ \lambda &= q^{r-1} - 1 + q \vartheta_{r-1} \frac{q^{r-2} - 1}{q - 1} = q^{r-1} - 1 + q \vartheta_{r-1} \theta_{r-3} \\ \mu &= \vartheta_r \frac{q^{r-1} - 1}{q - 1} = \vartheta_{r-1} \theta_{r-2}. \end{aligned}$$

Beweis. Die Zahl ϑ_r ist so definiert, dass $N = \vartheta_r \theta_{r-1}$ gilt. Für $P \in \mathbb{P}$ ist P^\perp ein Kegel mit P als Spitze über einem Polarraum vom selben Typ wie \mathbb{P} mit Rang $r - 1$. Also ist P mit $q \theta_{r-2} \vartheta_{r-1}$ Punkten adjazent. Für zwei kollineare Punkt P und Q ist $(PQ)^\perp$ ein Kegel mit Spitze PQ über einem Polarraum vom selben Typ wie \mathbb{P} von Rang $r - 2$. Also ist

$$\begin{aligned} \lambda &= q - 1 + \vartheta_{r-2} \theta_{r-3} q^2 \\ &= q - 1 + (\vartheta_{r-1} + q - 1) \theta_{r-3} q \\ &= q - 1 + \vartheta_{r-1} \theta_{r-3} q + q(q^{r-2} - 1) \\ &= q^{r-1} - 1 + q \vartheta_{r-1} \theta_{r-3}. \end{aligned}$$

Sind P und Q nicht kollinear, schneiden sich P^\perp und Q^\perp in den $\mu = \vartheta_{r-1} \theta_{r-2}$ Punkten eines Polarraums des selben Typs und Rang $r - 1$. \square

Für die Eigenwerte des stark regulären Graphens gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} e^+ &= q^{r-1} - 1 \\ e^- &= -\vartheta_{r-1}. \end{aligned}$$

Dies führt im ungewichteten Fall zu den Schnittzahlen

$$\begin{aligned} |P^\perp \cap \mathcal{T}| &= q^{r-1} + x \theta_{r-2} \text{ für } P \in \mathcal{T} \\ |P^\perp \cap \mathcal{T}| &= x \theta_{r-2} \text{ für } P \notin \mathcal{T} \end{aligned}$$

für ein x -Tight Set \mathcal{T} und

$$\begin{aligned} |P^\perp \cap \mathcal{O}| &= -\vartheta_{r-1} + 1 + m\vartheta_{r-1} \text{ für } P \in \mathcal{O} \\ |P^\perp \cap \mathcal{O}| &= m\vartheta_{r-1} \text{ für } P \notin \mathcal{O} \end{aligned}$$

für einen m -Ovoid \mathcal{O} bzw. allgemeiner im gewichteten Fall zu den Schnitzzahlen

$$\begin{aligned} q^{r-1}f(y) + x\theta_{r-2} \text{ und} \\ (-\vartheta_{r-1} + 1)f(y) + m\vartheta_{r-1} \end{aligned}$$

für einen Punkt y . Für ein x -Tight Set gilt

$$|\mathcal{T}| = x(1 - k/e^-) = x(1 + q\theta_{r-2}) = x\theta_{r-1}$$

und für einen m -Ovoid $|\mathcal{O}|$ gilt

$$|\mathcal{O}| = \frac{-me^-N}{k - e^-} = m\vartheta_r.$$

Die bereits bekannten Beispiele für gewichtete Intriguing Sets existieren in Polarräumen:

Beispiel 2.3.2. *In einem Polarraum entspricht eine reguläre Clique einem maximalen Erzeuger. Ein maximaler Erzeuger ist somit ein 1-Tight Set.*

Korollar 2.3.3. *Ein Erzeuger trifft einen (gewichteten) m -Ovoid in m (gewichteten) Punkten.*

Beweis. Ein Erzeuger ist ein 1-Tight Set. Die Behauptung folgt aus 2.2.4. \square

Beispiel 2.3.4. *Sei \mathbb{P} ein Polarraum in $PG(n, q)$ mit Erzeugern der Dimension r . Definiere f folgendermaßen:*

$$f(Q) := \begin{cases} 1, & \text{falls } Q \in P^\perp \setminus \{P\} \\ -q^{r-1} + 1, & \text{falls } Q = P \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist f ein gewichteter θ_{r-2} -Ovoid.

Korollar 2.3.3 lässt sich hier leicht nachrechnen: Sei G ein Erzeuger von \mathbb{P} . Liegt $P \in G$, so gilt $G \subseteq P^\perp$. Also ist

$$\sum_{Q \in G} f(Q) = -q^{r-1} + 1 + \sum_{Q \in G \setminus \{P\}} 1 = -q^{r-1} + 1 + \theta_{r-1} - 1 = \theta_{r-2}.$$

Für $P \notin G$ ist $\text{Rang}(P^\perp \cap G) = r - 1$ und damit

$$\sum_{Q \in G} f(Q) = \theta_{r-2}.$$

Nun lässt sich mit diesen Beispielen gemäß 2.2.7 und Folgende zeigen, dass alle Intriguing Sets in einem Polarraum m -Ovoide oder x -Tight Sets sind.

Korollar 2.3.5. *Ein (gewichtetes) Intriguing Set \mathcal{I} in einem Polarraum ist immer ein (gewichtetes) Tight Set oder ein (gewichteter) m -Ovoid.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus 2.2.5 und 2.2.7, da ein 1-Tight Set und ein θ_{r-2} -Ovoid existieren, wenn man $\text{ggT}(-\mu/e^-, 1 - k/e^-) = 1$ zeigt.

Der Fall $r = 1$ ist trivial. Für $r > 1$ gilt $-\mu/e^- = \theta_{r-2}$ und $1 - k/e^- = \theta_{r-1}$. Nun gilt für $a \in \mathbb{Z}$

$$a \mid \theta_{r-1}, \theta_{r-2} \Rightarrow a \mid \theta_{r-1} - q\theta_{r-2} = 1.$$

Damit ist $a = 1$, also sind θ_{r-1} und θ_{r-2} coprime* für $r > 1$. □

2.3.2 Verallgemeinerte Vierecke

Ein **verallgemeinertes Viereck** mit den Parametern (s, t) ist eine Inzidenzgeometrie, bei der gilt:

1. Durch jeden Punkt gehen $s + 1$ Geraden.
2. Jede Gerade enthält $t + 1$ Punkte.
3. Es gibt genau eine Gerade, die eine Gerade ℓ und einen Punkt P mit $P \notin \ell$ verbinden.

*Im Beweis in [3] wird behauptet, $q^r - 1$ und $q^{r-1} - 1$ seien coprime. Dies ist natürlich für $q > 2$ falsch, da $q - 1$ ein gemeinsamer Teiler ist.

Verallgemeinerte Vierecke sind stark reguläre Graphen und somit besitzen sie Intriguing Sets. Die klassischen verallgemeinerten Vierecke entsprechen den Polarräumen $Q(4, q)$, $Q^-(5, q)$, $W(3, q)$, $H(4, q^2)$ und $H(5, q^2)$. Dazu gibt es noch nicht klassische verallgemeinerte Vierecke z.B. mit den Parametern $(q - 1, q + 1)$.

2.3.3 Kleinquadrik

Ein x -Tight Set der **Kleinquadrik** $Q^+(5, q)$ entspricht unter der **Kleinkorrespondenz** einer Geradenmenge in $PG(3, q)$, die jede Faserung in x Geraden trifft. Solche Geradenmengen heißen **Cameron-Liebler-Geradenmengen**. Cameron-Liebler-Geradenmengen werden u.a. in [13], [7] und [12] untersucht. In [24] findet sich eine Übersetzung aller wichtigen Objekte bzgl. x -Tight Sets in $Q^+(5, q)$ nach $PG(3, q)$.

3 Konstruktionen von Intriguing Sets in Polarräumen

Dieser Abschnitt soll eine Reihe einfacher Konstruktionen von Intriguing Sets in Polarräumen darstellen. Begonnen wird in Abschnitt 3.1 mit der Vorstellung der Möglichkeit, durch Schnitt, Vereinigung und Komplement aus vorhandenen Intriguing Sets neue Intriguing Sets zu erhalten. Nebenbei werden hiermit **Irreduzibilität** für Intriguing Sets definiert sowie die Räume V^+ und V^- geometrisch beschrieben.

Die ersten Beispiele für Intriguing Sets werden in Abschnitt 3.2 vorgestellt: **Hyperebenenschnitte** liefern in bestimmten Fällen Intriguing Sets. In manchen Fällen erhalten nicht-ausgeartete Hyperebenenschnitte auch Intriguing Sets. Die Abschnitte 3.3 und 3.4 zeigen, wie man durch Körpereinbettungen und Körperreduktionen weitere Beispiele für Intriguing Sets erhält.

In Abschnitt 3.5 wird der Begriff des m -**Systems** vorgestellt und motiviert. Der Begriff ist hier interessant, da jedes m -System einen θ_m -Ovoiden liefert. Zum Schluss wird in Abschnitt 3.6 eine Reihe einfacher Konstruktionen für vergleichsweise kleine x -Tight Sets vorgestellt, die in vielen Polarräumen möglich sind.

3.1 Einfache Konstruktionen

Die **Vereinigung** und die **Differenz** von zwei gewichteten Intriguing Sets f und g ist wieder ein gewichtetes Intriguing Set, da $(\mathcal{V}^\epsilon)^\perp$ ein Unterraum ist und damit für alle $\alpha \in \mathbb{Z}$ gilt

$$f, g \in (\mathcal{V}^\epsilon)^\perp \Rightarrow f + g, f - g, \alpha f \in (\mathcal{V}^\epsilon)^\perp.$$

Spezialfälle liefern (schon bekannte) Konstruktionen für ungewichtete Intriguing Sets.

Lemma 3.1.1. *Sei \mathcal{T} ein ungewichtetes x -Tight Set und \mathcal{T}' ein ungewichtetes x' -Tight Set. Sei \mathcal{O} ein ungewichteter m -Ovoid und \mathcal{O}' ein ungewichteter m' -Ovoid.*

- (a) *Sind \mathcal{T} und \mathcal{T}' disjunkt, so ist $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ ein $x + x'$ -Tight Set. Sind \mathcal{O} und \mathcal{O}' disjunkt, so ist $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}'$ ein $m + m'$ -Ovoid.*
- (b) *Ist $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, so ist $\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}'$ ein $x - x'$ -Tight Set. Ist $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$, so ist $\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}'$ ein $m - m'$ -Ovoid.*
- (c) *Es ist $\mathcal{P} \setminus \mathcal{T}$ ein Tight Set und $\mathcal{P} \setminus \mathcal{O}$ ein Ovoid.*

Beweis. Die Bedingungen garantieren jeweils, dass Vereinigung und Schnitt ungewichtete Intriguing Sets bleiben. Der Vektor j ist der charakteristische Vektor von \mathcal{P} . Also ist \mathcal{P} sowohl Ovoid als auch Tight Set. Damit ist (c) ein Spezialfall von (b). □

Die Vektorräume V^- und V^+ lassen sich über Polarräumen geometrisch interpretieren, wie Eisfeld in [13] für V^- in partiellen Geometrien und Bamberg in [2] für V^- und V^+ im Spezialfall der verallgemeinerten Vierecke feststellte*.

Lemma 3.1.2. *Sei \mathbb{T} die Menge aller Erzeuger von \mathbb{P} und \mathbb{O} die Menge aller gewichteten m -Ovoide gemäß Beispiel 2.3.4. Dann gilt*

$$\begin{aligned} (V^-)^\perp &= \langle \mathbb{T} \rangle \\ (V^+)^\perp &= \langle \mathbb{O} \rangle. \end{aligned}$$

Beweis. Für $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ ist $\mathcal{T} \in (V^-)^\perp$ und damit $(V^-)^\perp \supseteq \langle \mathbb{T} \rangle$ klar. Es bleibt $(V^-)^\perp \subseteq \langle \mathbb{T} \rangle$ zu zeigen.

Betrachte im Folgenden die Punkte und Erzeuger von \mathbb{P} geordnet. Betrachte die Inzidenzmatrix C der Erzeuger von \mathbb{P} , d.h. für $C = (c_{ij})$ ist $c_{ij} = 1$, falls der j -te Erzeuger den i -ten Punkt enthält, und sonst $c_{ij} = 0$. Dann ist der (i, j) -te Eintrag von CC^t gleich der Anzahl der Erzeuger, die den i -ten und j -ten Punkt enthalten. Sei

$$\alpha := \prod_{i=1}^{r-2} \vartheta_i$$

*Die erste Gleichung des folgenden Lemmas wird ähnlich zu Eisfeld, die zweite ähnlich zu Bamberg bewiesen.

die Anzahl der Erzeuger durch zwei verschiedene, kollineare Punkte, d.h. die Anzahl der Erzeuger eines Polarraums vom selben Typ wie \mathbb{P} und Rang $r - 2$. Ist $i = j$, so ist der (i, j) -te Eintrag $\alpha\vartheta_{r-1}$. Die Matrix A ist weiterhin die Adjazenzmatrix des Graphen. Ist $i \neq j$ und der i -te und j -te Punkt kollinear, so ist der (i, j) -te Eintrag α . Dies führt zur Gleichung

$$\alpha^{-1}CC^t = A + \vartheta_{r-1}E. \quad (3.1.3)$$

Betrachte einen Vektor

$$v = cj + v^- + v^+$$

mit $v^\epsilon \in V^\epsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned} (A - e^-E)v &= c(e^- - k)j + (e^- - e^-)v^- + (e^- - e^+)v^+ \\ &= c(e^- - k)j + (e^- - e^+)v^+. \end{aligned}$$

Damit ist das Bild von $A - e^-E$ der ganze Raum $\langle V^+, j \rangle$. Das Bild von $A - e^-E$ ist aber nach (3.1.3) eine Teilmenge des Erzeugnisses des Bildes von CC^t und damit eine Teilmenge von $\langle \mathbb{T} \rangle$.

Für $\mathcal{O} \in \mathbb{O}$ ist $\mathcal{O} \in (V^+)^\perp$ und damit $(V^+)^\perp \supseteq \langle \mathbb{O} \rangle$ wie eben klar. Sei nun $f \in \langle \mathbb{O} \rangle^\perp$. Dann ist $\langle \mathcal{O}, f \rangle = 0$ für alle $\mathcal{O} \in \mathbb{O}$. Damit folgt $\langle \mathbb{O} \rangle^\perp \subseteq V^+$. \square

Da die Differenz zweier Intriguing Sets aus $(V^\epsilon)^\perp$ aus Lemma 3.1.2 immer in $V^{-\epsilon}$ liegt, folgt direkt:

Korollar 3.1.4.

$$\begin{aligned} V^+ &= \langle \{x - y \mid x, y \in \mathbb{T}\} \rangle \\ V^- &= \langle \{x - y \mid x, y \in \mathbb{O}\} \rangle \end{aligned}$$

Lemma 3.1.2 besagt, dass jedes gewichtete x -Tight Set eine Summe gewichteter Erzeuger und jeder gewichtete m -Ovoid eine Summe gewichteter Kegel gemäß 2.3.4 ist.

Bemerkung 3.1.5. *Das Resultat legt zusammen mit 2.1.1 nahe, die Suche nach Intriguing Sets als ganzzahliges oder rationales lineares Optimierungsproblem zu*

definieren, bei dem eine Reihe von Erzeugern oder gewichteten Kegeln ausgewählt werden. Auf Grund der großen Anzahl Erzeuger ist dies aber ohne weitere Einschränkungen sicher kein sinnvoller Ansatz, um Intriguing Sets zu finden.

Irreduzibilität

Sei \mathcal{I} ein gewichtetes Intriguing Set. Damit gibt es $\mathbb{I} \in \{\mathbb{O}, \mathbb{T}\}$, $\{f_1, f_2, \dots, f_\alpha\} \subseteq \mathbb{I}$ und $a_1, \dots, a_\alpha \in \mathbb{R}$, so dass

$$\mathcal{I} = \sum a_i f_i$$

gilt. Nun kann es für ein \mathcal{I} sein, dass es für jede Wahl der Koeffizienten a_i ein a_i mit $a_i < 0$ existiert. In diesem Fall sieht man \mathcal{I} nicht mehr an, dass zu seiner Konstruktion ein Erzeuger oder Kegel verwendet wurde. Man kann aber eventuell aus einem Intriguing Set \mathcal{I} mit nur nicht-negativen Gewichten a_i ein Intriguing Set \mathcal{I}' mit nicht-negativen Gewichten entfernen, so dass $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}'$ weiterhin ein Intriguing Set mit nur nicht-negativen Gewichten ist. Diese Überlegung führt zur folgenden Definition:

Definition 3.1.6. Ein (nicht-negatives) Intriguing Set \mathcal{I} heißt **irreduzibel** genau dann, wenn es nicht die Vereinigung kleinerer (nicht-negativer) Intriguing Sets ist. Andernfalls heißt \mathcal{I} **reduzibel**.

Es stellt sich die Frage nach der **Klassifikation irreduzibler Intriguing Sets**. Hierzu werden später einige Existenzresultate behandelt.

Eine alternative Beschreibung gewichteter Intriguing Sets

Aus Lemma 3.1.2 folgt dieses Korollar:

Korollar 3.1.7. (a) Sei $\mathcal{O} \in \mathbb{C}^N$. Dann ist \mathcal{O} genau dann ein m -Ovoid, wenn

$$(\mathcal{O}, \mathcal{T}) = m$$

für alle $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ gilt.

(b) Sei $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^N$. Dann ist \mathcal{T} genau dann ein x -Tight Set, wenn

$$(\mathcal{O}, \mathcal{T}) = x\theta_{r-2}$$

für alle $\mathcal{O} \in \mathbb{O}$ und $x \in \mathbb{Z}$ gilt.

Beweis. (a) Ein \mathcal{O} steht genau dann auf $V^+ = \langle \{x - y \mid x, y \in \mathbb{T}\} \rangle$ senkrecht, wenn $(\mathcal{O}, x - y) = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{T}$ gilt. Dies ist äquivalent zu $(\mathcal{O}, x) = (\mathcal{O}, y) =: m$.

(b) Ein \mathcal{T} steht genau dann auf V^- senkrecht, wenn $(\mathcal{T}, z - y) = 0$ für alle $z, y \in \mathbb{O}$ gilt. Dies ist äquivalent zu $(\mathcal{T}, z) = (\mathcal{T}, y) =: x\theta_{r-2}$.

□

Bemerkung 3.1.8. Die Aussagen dieses Abschnitts bleiben genauso für beliebige partielle Geometrien wahr (siehe [13]).

3.2 Hyperebenenschnitte

Der Schnitt eines Polarraums \mathbb{P} mit Rang r mit einer nichtausgeartete Hyperebene H liefert einen Polarraum von Rang r bzw. $r - 1$. Hat der kleinere Polarraum Rang r , so ist $H \cap \mathbb{P}$ ein Tight Set. Hat er Rang $r - 1$, so ist $H \cap \mathbb{P}$ ein m -Ovoid.

Lemma 3.2.1. Sei \mathbb{P} ein Polarraum mit Rang r über $GF(q)$ und H eine nicht-ausgeartete Hyperebene. Dann ist $\mathbb{P} \cap H$ ein Intriguing Set von \mathbb{P} , wobei es sich um

- ein $\vartheta_{\mathbb{P} \cap H}$ -Tight Set handelt, falls $\mathbb{P} \cap H$ Rang r hat.
- einen θ_{r-2} -Ovoid handelt, falls $\mathbb{P} \cap H$ Rang $r - 1$ hat.

Beweis. Sei H eine nicht-ausgeartete Hyperebene. Dann ist $\mathbb{P} \cap H$ ein Polarraum. Hat $\mathbb{P} \cap H$ Rang r , so steht $P \in H$ auf einem Polarraum des selben Typs wie $\mathbb{P} \cap H$ mit Rang $r - 1$ senkrecht. Es folgt

$$|P^\perp \cap H \cap \mathbb{P}| = 1 + q\theta_{r-2}\vartheta_{r-2} =: h_1.$$

\mathbb{P}	\mathbb{P}'	Intriguing Set
$H(2r, q^2)$	$H(2r - 1, q^2)$	$(1 + q^{2r-1})$ -Tight Set
$H(2r - 1, q^2)$	$H(2r - 2, q^2)$	θ_{r-2}^q -Ovoid
$Q^-(2r + 1, q)$	$Q(2r, q)$	$(1 + q^r)$ -Tight Set
$Q(2r, q)$	$Q^+(2r - 1, q)$	$(1 + q^{r-1})$ -Tight Set
$Q(2r, q)$	$Q^-(2r - 1, q)$	θ_{r-2}^q -Ovoid
$Q^+(2r - 1, q)$	$Q(2r, q)$	θ_{r-2}^q -Ovoid

Abbildung 3.1: Tabelle der Intriguing Sets nach 3.2.1.

Der Senkrechttraum P^\perp eines Punktes $P \notin H$ schneidet hingegen H in einem Polarraum des selben Typs wie \mathbb{P} mit Rang $r - 1$. Dies liefert

$$|P^\perp \cap H \cap \mathbb{P}| = \vartheta_{r-1} \theta_{r-2} =: h_2.$$

Hier ist $h_1 > h_2$. Hat $\mathbb{P} \cap H$ Rang $r - 1$, so liefert die selbe Rechnung für $P \in H$

$$|P^\perp \cap H \cap \mathbb{P}| = 1 + q\theta_{r-3}\vartheta_{r-1} =: h_1$$

und für $P \notin H$

$$|P^\perp \cap H \cap \mathbb{P}| = \vartheta_{r-1} \theta_{r-2} =: h_2.$$

Hier ist $h_1 < h_2$. Nach Folgerung 2.3.5 handelt es sich um x -Tight Sets bzw. m -Ovoide. Die Werte für m und x lassen sich ablesen. \square

Die Ergebnisse des Satzes sind in Tabelle 3.1 für die einzelnen Polarräume ausgeführt. Solche m -Ovoide und Tight Sets heißen **klassisch**.

Bettet man einen Polarraum \mathbb{P} aus $\text{PG}(n, q)$ in einen anderen Polarraum \mathbb{P}' aus $\text{PG}(n + 1, q)$ natürlich ein, so dass $\langle \mathbb{P} \rangle$ eine Hyperebene ist, kann es sein, dass ein m -Ovoid von \mathbb{P} auch ein m -Ovoid von \mathbb{P}' ist. Genauso passiert es, dass ein x -Tight Set von \mathbb{P}' ein x -Tight Set von \mathbb{P} ist. Dies passiert jeweils genau dann, wenn die Dimension der Erzeuger von \mathbb{P}' um eins größer als die Dimension der Erzeuger von \mathbb{P} ist.

Lemma 3.2.2. *Sei \mathbb{P} ein Polarraum mit Rang $r > 1$ und \mathbb{P}' ein Polarraum mit Rang $r + 1$, $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{P}'$ und $\langle \mathbb{P} \rangle$ eine Hyperebene von $\langle \mathbb{P}' \rangle$. Sei \mathcal{O} ein (gewichteter) m -Ovoid von \mathbb{P} . Dann ist \mathcal{O} ein gewichteter m -Ovoid von \mathbb{P}' . D.h.*

1. *ist $\mathbb{P} = Q^-(2r + 1, q)$, so ist \mathcal{O} ein m -Ovoid von $Q(2r + 2, q)$.*

2. ist $\mathbb{P} = Q(2r, q)$, so ist \mathcal{O} ein m -Ovoid von $Q^+(2r + 1, q)$.

3. ist $\mathbb{P} = H(2r, q^2)$, so ist \mathcal{O} ein m -Ovoid von $H(2r + 1, q^2)$.

Beweis. Beachte, dass hier jeweils $\vartheta_{\mathbb{P}} = \vartheta_{\mathbb{P}'}$ gilt. Sei $P \in \mathbb{P}'$. Ist $P \in \mathbb{P} \cap \mathcal{O}$, so ist $|P^\perp \cap \mathcal{O}| = 1 + (m - 1)\vartheta_{\mathbb{P}}$. Ist $P \in \mathbb{P} \setminus \mathcal{O}$, so ist $|P^\perp \cap \mathcal{O}| = m\vartheta_{\mathbb{P}}$. Ist $P \in \mathbb{P}' \setminus \mathbb{P}$ und gehen durch einen Punkt von $P^\perp \cap \mathbb{P}$ genau α Erzeuger von $P^\perp \cap \mathbb{P}$, so gehen durch P genau $\alpha\vartheta_{\mathbb{P}}$ Erzeuger von \mathbb{P} . Also folgt per doppelter Abzählung $|P^\perp \cap \mathcal{O}|\alpha = m\alpha\vartheta_{\mathbb{P}}$. \square

Liegt ein m -Ovoid von $Q^+(2r + 1, q)$ oder $H(2r, q^2)$ in einer nicht-degenerierten Hyperebene, ist es aus den selben Gründen auch ein m -Ovoid von $Q(2r, q)$ bzw. $H(2r - 1, q^2)$.

Lemma 3.2.3. *Sei \mathbb{P} ein Polarraum mit Rang $r > 1$ und \mathbb{P}' ein Polarraum mit Rang $r - 1$, $\mathbb{P}' \subseteq \mathbb{P}$ und $\langle \mathbb{P}' \rangle$ eine Hyperebene von $\langle \mathbb{P} \rangle$. Sei \mathcal{T} ein (gewichtetes) x -Tight Set von \mathbb{P} . Dann ist $\mathcal{T} \cap \mathbb{P}'$ ein (gewichtetes) x -Tight Set von \mathbb{P}' . D.h.*

1. Ist $\mathbb{P} = Q^+(2r - 1, q)$, so ist \mathcal{T} ein x -Tight Set von $Q(2r - 2, q)$.

2. Ist $\mathbb{P} = Q(2r, q)$, so ist \mathcal{T} ein x -Tight Set von $Q^-(2r - 1, q)$.

3. Ist $\mathbb{P} = H(2r - 1, q^2)$, so ist \mathcal{T} ein x -Tight Set von $H(2r - 2, q)$.

Beweis. Ein gewichtetes x -Tight Set ist eine Summe von positiv oder negativ gewichteten Erzeugern. Hierbei ist die Summe der positiven Gewichte $\alpha + x$ und die Summe der negativen Gewichte α für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Jeder Erzeuger von \mathbb{P} ist auch ein Erzeuger von \mathbb{P}' , damit folgt die Behauptung, da damit auch in der Einschränkung auf \mathbb{P}' die Summe der Gewichte x ist. \square

Bemerkung 3.2.4. *Lemma 3.2.1 ist ein Spezialfall von 3.2.2 und 3.2.3, da jeweils der gesamte Polarraum ein Ovoid bzw. Tight Set von sich selbst ist.*

Kelly stellt im zweiten Teil der Arbeit [15] eine Verallgemeinerung einer Konstruktion von Thas und Payne aus [29] vor. Thas' und Paynes Konstruktion nimmt einen klassischen Ovoiden \mathcal{O} für $H(3, q^2)$ gemäß 3.2.1 und eine Sekante s von \mathcal{O} mit $|s \cap \mathcal{O}| = q + 1$. Dann ist

$$\mathcal{O}' := (\mathcal{O} \setminus s) \cup (s^\perp \cap H(3, q^2))$$

wieder ein Ovoid. Kelly verallgemeinert diese Konstruktion für $H(2r - 1, q^2)$ und $Q^+(2r - 1, q)$.

Lemma 3.2.5. *Sei \mathcal{O} ein ungewichteter m -Ovoid eines Polarraums \mathbb{P} mit Rang r in $PG(2r - 1, q)$ und sei s ein $(r - 1)$ -dimensionaler Unterraum von $PG(2r - 1, q)$ mit $s^\perp \cap \mathcal{O} \subseteq s \cap \mathbb{P} \subseteq \mathcal{O}$. Dann ist*

$$\mathcal{O}' := (\mathcal{O} \setminus s) \cup (s^\perp \cap \mathbb{P})$$

ein m -Ovoid von \mathbb{P} .

Beweis. Es ist zu zeigen, dass jeder Erzeuger M die Menge \mathcal{O}' in m Punkten schneidet. Es gilt

$$\begin{aligned} \dim(M \cap s) &= \dim(M) + \dim(s) - \dim(\langle M, s \rangle) \\ &= 2r - 2 - \dim(\langle M, s \rangle) \end{aligned}$$

und wegen $M = M^\perp$ zudem

$$\begin{aligned} \dim(M \cap s^\perp) &= \dim(M^\perp \cap s^\perp) \\ &= \dim(\langle M, s \rangle^\perp) \\ &= 2r - 2 - \dim(\langle M, s \rangle). \end{aligned}$$

Damit gilt $\dim(M \cap s) = \dim(M \cap s^\perp)$. Nach Voraussetzung ist zudem $s^\perp \cap (\mathcal{O} \setminus s)$ leer. Es folgt

$$\begin{aligned} |M \cap \mathcal{O}'| &= |M \cap \mathcal{O}| - |M \cap \mathcal{O} \cap s| + |M \cap s^\perp| - |M \cap s^\perp \cap (\mathcal{O} \setminus s)| \\ &= |M \cap \mathcal{O}| - |M \cap s^\perp \cap (\mathcal{O} \setminus s)| = |M \cap \mathcal{O}|. \end{aligned}$$

Damit ist \mathcal{O}' ein m -Ovoid. □

Lemma 3.2.6. *Sei $\mathbb{P} = H(2r - 1, q)$ oder $\mathbb{P} = Q^+(2r - 1, q)$. Sei des Weiteren H eine nichtausgeartete Hyperebene und $\mathcal{O} = H \cap \mathbb{P}$ der zugehörige m -Ovoid. Dann existiert ein $(r - 1)$ -dimensionaler Unterraum $s \subseteq H$ mit $s^\perp \cap \mathcal{O} \subseteq s \cap \mathbb{P} \subseteq \mathcal{O}$. Der gemäß 3.2.5 entstehende m -Ovoid ist nicht klassisch, d.h. er liegt in keiner Hyperebene.*

Beweis. Sei V ein total isotroper, $(r - 3)$ -dimensionaler Unterraum mit $V \subseteq H$. Nun hat V^\perp Dimension $r + 1$ und $V^\perp \cap H$ Dimension r . Da V total isotrop ist, handelt es bei V^\perp um einen Kegel mit Spitze V über einem Polarraum \mathbb{P}' mit Rang 2 vom selben Typ wie \mathbb{P} . Dementsprechend ist $(V^\perp \cap H)/V$ bzw. $H \cap \mathbb{P}'$ ein Polarraum mit Rang 1 vom selben Typ wie \mathbb{P}' .

Sei nun s das Erzeugnis $\langle V, \mathbb{P}' \rangle$. Dann ist $\langle V, \mathbb{P}' \rangle \cap \mathbb{P} \subseteq H \cap \mathbb{P}$ und

$$\langle V, \mathbb{P}' \rangle^\perp \cap H = (V^\perp \cap H) \cap (\mathbb{P}'^\perp \cap H) = \langle V, \mathbb{P}' \rangle \cap V \subseteq s \cap \mathbb{P}.$$

Damit sind die Bedingungen aus 3.2.5 erfüllt.

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{O}' nicht in einer Hyperebene enthalten ist. Nun entfernt man aus H den echten Unterraum s . Also gilt weiterhin $H \subseteq \langle \mathcal{O}' \rangle$. Andererseits ist nach Konstruktion klar, dass $s^\perp \not\subseteq H$ gilt. Damit spannt \mathcal{O}' den gesamten Raum auf. \square

3.3 Unterkörpereinbettungen

Betrachte zwei Körper K und L , wobei K ein Unterkörper von L ist. Betrachte einen Polarraum \mathbb{P} über K und einen anderen Polarraum \mathbb{P}' über L , so kann man \mathbb{P} ggf. in \mathbb{P}' natürlich einbetten. Haben \mathbb{P} und \mathbb{P}' den selben Typ, so ist diese Einbettung offensichtlich möglich. Man kann zeigen (siehe [23], Kapitel III, Satz 1.10), dass $W(2r + 1, q) \subseteq \text{PG}(2r + 1, q) \subseteq \text{PG}(2r + 1, q^2)$ eine Teilmenge von $H(2r + 1, q^2)$ ist und jeder Punkt $P \in H(2r + 1, q^2) \setminus W(2r + 1, q)$ auf genau einer verlängerten Geraden von $W(2r + 1, q)$ liegt. Bezeichne dies als die **natürliche Einbettung** von $W(2r + 1, q)$ in $H(2r + 1, q^2)$.

Lemma 3.3.1. *Betrachte die natürliche Einbettung von $W(2r - 1, q)$ in $H(2r - 1, q^2)$. Dann ist $W(2r - 1, q)$ ein $(q+1)$ -Tight Set von $H(2r - 1, q^2)$.*

Beweis. Für einen Punkt $P \in H(2r - 1, q^2) \setminus W(2r - 1, q)$ enthält P^\perp genau eine Gerade ℓ von $W(2r - 1, q)$. Ein Punkt $Q \in W(2r - 1, q)$ trifft ℓ in $W(2r - 1, q)$.

Steht also Q auf P senkrecht, so auch auf ℓ . Natürlich gilt auch $\ell^\perp \subseteq P^\perp$. Es folgt $P^\perp \cap W(2r+1, q) = \ell^\perp \cap W(2r+1, q)$. Damit gilt $|P^\perp \cap W(2r+1, q)| = \theta_{2r-2}^q$. Für einen Punkt $P \in W(2r-1, q)$ schneidet P^\perp die Menge $W(2r-1, q)$ in einer Hyperebene, also θ_{2r-3}^q Punkten. Damit handelt es sich um ein $(q+1)$ -Tight Set. \square

Im Folgenden sei \mathbb{P} mit $r > 1$ entweder $W(2r-1, q^2)$ oder $Q(2r, q^2)$ und \mathbb{P}_q die Untergeometrie, die durch die Abbildung $x \mapsto x^q$ festgelassen wird, d.h. $\mathbb{P}_q = W(2r-1, q)$ oder $\mathbb{P}_q = Q(2r, q)$. Betrachte die drei Punktmenge

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_q &= \{P \in \mathbb{P} \mid P = P^q\} \\ \mathcal{T} &:= \{P \in \mathbb{P} \mid P \neq P^q, PP^q \subseteq \mathbb{P}\} \\ \mathcal{T}' &:= \{P \in \mathbb{P} \mid P \neq P^q, PP^q \not\subseteq \mathbb{P}\}.\end{aligned}$$

Bezeichne Geraden von \mathbb{P} , die \mathbb{P}_q in 0, 1 oder $q+1$ Punkten treffen, als **Passanten**, **Tangenten** oder **Sekanten**.

Ziel ist nun, zu zeigen, dass \mathbb{P}_q , \mathcal{T} und \mathcal{T}' jeweils Tight Sets sind.

Bemerkung 3.3.2. *Betrachte den Stabilisator der Punktmenge von \mathbb{P}_q in der Isomorphismengruppe von \mathbb{P} . Dann sind \mathbb{P}_q , \mathcal{T} und \mathcal{T}' die drei Bahnen des Stabilisators. Ein Beweis findet sich in [16], § 4.5.*

Es ist klar, dass

$$|\mathbb{P}_q| = \frac{q^{2r} - 1}{q - 1}$$

gilt. Da jeder Punkt von \mathcal{T} auf genau einer Geraden von \mathbb{P}_q liegt und auf einer Geraden von \mathbb{P}_q genau $q(q-1)$ Punkte von \mathcal{T} liegen, erhält man durch doppeltes Abzählen

$$|\mathcal{T}| = \theta_{2r-1}^q \theta_{2r-3}^q q(q-1)/(q+1) = \theta_{r-1}^{q^2} (q^{2r-2} - 1)q$$

und es bleibt

$$|\mathcal{T}'| = \frac{q^{4r} - 1}{q^2 - 1} - |\mathbb{P}_q| - |\mathcal{T}|.$$

Lemma 3.3.3. *Es gilt*

$$(a) \quad |P^\perp \cap \mathbb{P}_q| = \theta_{2r-2}^q = (q^2)^{r-1} + \theta_{2r-3}^q \text{ für } P \in \mathbb{P}_q$$

$$(b) \quad |P^\perp \cap \mathbb{P}_q| = \theta_{2r-3}^q \text{ für } P \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_q.$$

Beweis. Teil (a) ist klar, da dies genau der Senkrechttraum eines Punkts in \mathbb{P}_q ist. Ist nun $P \in \mathcal{T}'$, so ist $P^\perp \cap \mathbb{P}$ ein Kegel mit Spitze P über einem nichtausgearteten Polarraum \mathbb{P}' vom selben Typ wie \mathbb{P} . Da P^\perp keine Gerade von \mathbb{P}_q enthält, liegt $P^\perp \cap \mathbb{P}_q$ bei geeigneter Wahl von \mathbb{P}' in \mathbb{P}' . Damit ist $P^\perp \cap \mathbb{P}_q$ ein Polarraum vom selben Typ wie \mathbb{P}_q über $\text{GF}(q)$ mit einem um eins kleineren Rang. Es folgt $|P^\perp \cap \mathbb{P}_q| = \theta_{2r-3}^q$ Punkten.

Ist $P \in \mathcal{T}$, so liegt P auf genau einer Geraden ℓ von \mathbb{P}_q . Ein Punkt $Q \in P^\perp \cap \mathbb{P}_q$ steht sowohl auf P als auch einem Punkt von ℓ in \mathbb{P}_q senkrecht. Andererseits steht natürlich jeder Punkt aus ℓ^\perp auch auf P senkrecht. Also ist $P^\perp \cap \mathbb{P}_q = \ell^\perp \cap \mathbb{P}_q$. Dies liefert

$$|P^\perp \cap \mathbb{P}_q| = q + 1 + q^2 \theta_{2r-5}^q = \theta_{2r-3}^q.$$

□

Hiermit sieht man schon, dass \mathbb{P}_q ein $(q+1)$ -Tight Set ist. Zeigt man nun noch, dass \mathcal{T} ein Tight Set ist, folgt nach Lemma 3.1.1, dass auch \mathcal{T}' ein Tight Set ist.

Lemma 3.3.4. *Sei $P \in \mathbb{P}_q$. Dann ist*

$$|P^\perp \cap \mathcal{T}| = q(q^{2r-2} - 1)\theta_{r-2}^{q^2}.$$

Beweis. Sei ℓ eine Tangente durch einen Punkt $P \in \mathbb{P}_q$. Gibt es einen Punkt $R \in \ell \cap \mathcal{T}$, so ist R^q sowohl mit P (wegen $P = P^q \in \ell$) als auch R kollinear. Damit ist die Ebene $\pi := RR^qP$ total isotrop. Betrachtet man einen Punkt $Q \in \ell$, so ist $Q^q \in \ell^q = PR^q$, d.h. Q^q liegt in π . Damit ist $QQ^q \subseteq \pi$, also $Q \in \mathcal{T}$. Damit treffen Tangenten durch P die Bahn \mathcal{T} in 0 oder q^2 Punkten.

Ist ℓ eine Sekante durch P , so ist $\ell = \ell^q$ und damit sind $q^2 - q$ Punkte von ℓ in \mathcal{T} .

Es soll gezeigt werden, dass durch jeden Punkt $Q \in \mathbb{P}_q$ eine konstante Anzahl α an Tangenten mit Punkten aus \mathcal{T} geht. Es gibt einen Isomorphismus von \mathbb{P} , der die Punktmenge \mathbb{P}_q auf sich selbst und Q auf P abbildet. Da $\sigma : x \mapsto x^q$

Kollineation erhält und \mathbb{P}_q festgelassen wird, wird auch die Menge \mathcal{T} durch σ auf sich selbst abgebildet. Also liegt Q auf genauso vielen Tangenten mit Punkten aus \mathcal{T} wie P .

Es gibt θ_{2r-3}^q Sekanten und α Tangenten mit Punkten aus \mathcal{T} durch P . Jeder Punkt aus \mathcal{T} ist mit θ_{2r-3}^q Punkten aus \mathbb{P}_q inzident. Doppelt abzählen ergibt

$$|\mathcal{T}| \theta_{2r-3}^q = |\mathbb{P}_q| (\theta_{2r-3}^q q (q-1) + \alpha q^2).$$

Dies liefert

$$\alpha = q(q^{2r-2} - 1) \theta_{r-3}^{q^2}.$$

Es folgt mit

$$|P^\perp \cap \mathcal{T}| = \alpha q^2 + \theta_{2r-3}^q q (q-1) = q(q^{2r-1} - 1) \theta_{r-1}^{q^2}$$

die Behauptung. □

Lemma 3.3.5. *Sei $P \in \mathcal{T}'$. Dann ist*

$$|P^\perp \cap \mathcal{T}| = q(q^{2r-2} - 1) \theta_{r-2}^{q^2}.$$

Beweis. Sei $P \in \mathcal{T}'$. Tangenten treffen \mathcal{T} in 0 oder q^2 Punkten, also trifft keine Tangente durch P die Bahn \mathcal{T} . Also liegen alle Punkte von $P^\perp \cap \mathcal{T}$ auf Passanten durch P . Betrachte eine Gerade ℓ von \mathbb{P} durch P .

Fall $|\ell^\perp \cap \ell^q| = 1$: Angenommen es gibt zwei verschiedene Punkte auf ℓ , die mit ℓ^q kollinear sind, so ist auch P mit P^q kollinear. Widerspruch. Also gibt es genau einen Punkt Q auf ℓ , der mit allen Punkten von ℓ^q kollinear ist und damit folgt $|\ell \cap \mathcal{T}| = |\{Q\}| = 1$. Dies heißt aber gerade, dass P mit Q und Q^q kollinear ist. Wegen $Q \in \mathcal{T}$, ist QQ^q eine Gerade von \mathbb{P}_q . Im Senkrechttraum von P sind dies aber genau die $\theta_{2r-3}^q \theta_{2r-5}^q / (q+1) = \theta_{r-2}^{q^2} \theta_{2r-5}^q$ Geraden eines $Q(2r-2, q)$ bzw. $W(2r-3, q)$. Auf jeder dieser Geraden liegen $q(q-1)$ Punkte aus \mathcal{T} . Dies ergibt genau

$$\beta \theta_{r-1}^{q^2} := \theta_{r-2}^{q^2} \theta_{2r-5}^q q (q-1) = q(q^{2r-4} - 1) \theta_{r-2}^{q^2}$$

Punkte bzw. Geraden durch P , die \mathcal{T} in genau einem Punkt treffen*.

Fall $|\ell^\perp \cap \ell^q| = 0$: In diesem Fall trifft ℓ die Bahn \mathcal{T} in $q + 1$ Punkten, denn die Geraden ℓ und ℓ^\perp spannen einen $Q^+(3, q^2)$ auf, von dem $2(q + 1)$ Geraden auch Geraden von $Q(2r, q)$ sind. Die $q + 1$ Geraden von $Q^+(3, q)$, die ℓ und ℓ^q treffen, liefern die gesuchten $q + 1$ Punkte von \mathcal{T} .

Es gibt $|Q(2r - 2, q^2)| = |W(2r - 3, q^2)|$ Geraden durch P . Ist $b\theta_{r-2}^{q^2}$ die Anzahl der Geraden durch P mit $|\ell^\perp \cap \ell^q| = 0$, so ergibt dies $|Q(2r - 2, q^2)| = (b + \beta + q + 1)\theta_{r-2}^{q^2}$, woraus $b + \beta = q(q^{2r-3} - 1)$ und damit $b = q(q^{2r-3} - q^{2r-4})$ folgt. Nun gilt

$$|P^\perp \cap \mathcal{T}| = (b(q + 1) + \beta)\theta_{r-2}^{q^2} = q(q^{2r-2} - 1)\theta_{r-2}^{q^2}.$$

□

Zum Abschluss wird gezeigt, dass es nur zwei Schnitzzahlen gibt.

Lemma 3.3.6. *Sei $P \in \mathcal{T}$. Dann ist*

$$|P^\perp \cap \mathcal{T}| = q^{2r-2} + q(q^{2r-2} - 1)\theta_{r-2}^{q^2}$$

Beweis. Alle Punkte von \mathcal{T} liegen auf Geraden von \mathbb{P}_q . Sei $P \in \mathcal{T}$ und ℓ eine Sekante. Ist $\ell \subseteq P^\perp$, so liegen alle $q(q-1)$ Punkte von $\ell \cap \mathcal{T}$ in \mathcal{T} . Ist $|\ell \cap P^\perp \cap \mathbb{P}_q| = 1$, so liegen 0 Punkte von ℓ in \mathcal{T} . Ist $|\ell \cap P^\perp \cap \mathbb{P}_q| = 0$, so liegt ein Punkt von ℓ in \mathcal{P} . Wie bereits gesehen ist $P^\perp \cap \mathbb{P}_q$ immer der Senkrechttraum der Sekante s , die P trifft. Hiermit sieht man schon, dass $|P^\perp \cap \mathcal{T}|$ für jedes P die selbe Zahl liefert, was für den Nachweis eines Tight Sets reicht. Im Folgenden wird die Zahl dennoch nachgerechnet.

Im Folgenden wird nur \mathbb{P}_q betrachtet. In \mathbb{P}_q hat s^\perp die Form $sQ(2r - 4, q)$. Der Senkrecht eines Punktes $R \in \mathbb{P}_q$ hat die Form $RQ(2r - 2, q)$, also gehen durch R genau θ_{2r-3}^q Geraden. Ist $R \in s$, so gehen durch R mit dem selben Argument wie eben genau θ_{2r-4}^q Geraden in s^\perp . Ist $R \in s^\perp \setminus s$, so hat $R^\perp \cap s^\perp$ die Form $sRQ(2r - 6)$, also gehen durch R genau θ_{2r-5}^q Geraden in s^\perp . Per doppelter Abzählung von

*In [3] ist dieser Fall anders aufgeschrieben. Für den parabolischen Fall sieht der dortige Beweis ausführlicher so aus: Ist R ein nicht mit P kollinearer Punkt, ist $P^\perp \cap R^\perp$ ein $Q(2r - 2, q^2)$ mit $P^\perp \cap Q(2r - 2, q^2) = P^\perp \cap \mathbb{P}_q$. Die Tangenten durch R sind also genau die Punkte in $|Q(2r - 2, q^2) \setminus Q(2r - 2, q)|$. Hiermit sieht man sofort $\alpha = \beta$. Der symplektische Fall folgt analog.

Punkt-Geraden-Paaren erhält man damit, dass \mathbb{P}_q genau $|\mathbb{P}_q| \theta_{2r-3}^q / (q+1) = \theta_{2r-1}^q \theta_{r-2}^{q^2}$ Geraden enthält, s^\perp (wegen $|s^\perp| = \theta_{2r-3}^q$) genau

$$\alpha := (q+1)(\theta_{2r-3}^q - \theta_{2r-4}^q) + (\theta_{2r-3}^q - q - 1)(\theta_{2r-3}^q - \theta_{2r-5}^q) = (q+1)q^{2r-3}\theta_{2r-4}^q$$

Geraden in genau einem Punkt treffen und s^\perp genau

$$\beta := [\theta_{2r-4}^q(q+1) + \theta_{2r-5}^q(\theta_{2r-3}^q - q - 1)] / (q+1)$$

Geraden enthält. Also ist

$$\begin{aligned} |P^\perp \cap \mathcal{T}| &= \beta q(q-1) + (\theta_{2r-1}^q \theta_{r-2}^{q^2} - \alpha - \beta) \\ &= q^{2r-2} + q(q^{2r-2} - 1)\theta_{r-2}^{q^2}. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.3.7. *Die Bahn*

1. \mathbb{P}_q ist ein $(q+1)$ -Tight Set.
2. \mathcal{T} ist ein $q(q^{2r-2} - 1)$ -Tight Set.
3. \mathcal{T}' ist ein Tight Set.

3.4 Körperreduktionen und -ableitungen

Ein n -dimensionaler Unterraum über $\text{GF}(q^e)$ entspricht einem ne -dimensionalen Unterraum über $\text{GF}(q)$. Insbesondere ist der eindimensionale Vektorraum $P := \langle v \rangle_{q^e}$ über $\text{GF}(q^e)$ ein e -dimensionaler Vektorraum über $\text{GF}(q)$. Ein Punkt von $\text{PG}(n, q^e)$ entspricht also einem $(e-1)$ -dimensionalen Unterraum von $\text{PG}(en-1, q)$. Wenn $M := \{P_1, \dots, P_m\}$ eine Punktmenge von $\text{PG}(n, q^e)$ ist, bezeichne mit $\mathcal{R}(M)$ die Vereinigung der Punktmenge der zu M gehörenden $(e-1)$ -dimensionalen Unterräume von $\text{PG}(en-1, q)$.

3.4.1 Körperreduktionen von klassischen endlichen Polarräumen

Sei nun κ eine **nichtausgeartete, reflexive Sesquilinearform** von $\text{GF}(q^e)^n$ und $T : \text{GF}(q^e) \rightarrow \text{GF}(q)$ mit $T(z) := \sum_{i=0}^{e-1} z^{q^i}$ die **Spur** von $\text{GF}(q^e)$ nach

$\text{GF}(q)$. Sei $\alpha \in \text{GF}(q^e)$ mit $\alpha \neq 0$. Definiere $\kappa' := T\alpha\kappa$. Nun wird man sehen, dass κ' eine nichtausgeartete Sesquilinearform von $\text{GF}(q)^{en}$ ist*. Kelly stellt in [15] fest, dass für ungewichtete Intriguing Sets \mathcal{I} eines zu κ gehörenden klassischen Polarraums in $\text{PG}(n, q^e)$ auch $\mathcal{R}(\mathcal{I})$ ein ungewichtetes Intriguing Set des zu κ' gehörenden Polarraums sein kann.

Für q gerade wird eine Quadrik nicht durch ihre begleitende Sesquilinearform beschrieben. Insbesondere ist die Quadrik $Q(2n, q)$ bzw. ihre zugehörige quadratische Form nicht ausgeartet, ihre zugehörige Sesquilinearform κ hingegen schon. In diesen Fällen wird die zur Quadrik gehörende quadratische Form betrachtet.

Sei X ein Polarraum. In diesem Abschnitt wird eine reflexive Sesquilinearform κ und eine quadratische Form Q_κ als vom Typ X bezeichnet, wenn κ und Q_κ isomorph zur in 1.2 genannten Normalform der Sesquilinearform des Polarraums bzw. der quadratischen Form der Quadrik sind.

Die folgenden Ergebnisse finden sich auch, etwas allgemeiner[†], bei Gill in [14].

Lemma 3.4.1. *Die Form κ' ist eine σ' -Sesquilinearform mit $\sigma' = \sigma|_{\text{GF}(q)}$.*

Beweis. Additivität: Seien $v, v', w, w' \in \text{GF}(q^e)^n$. Die Spur T ist additiv. Dann ist

$$\begin{aligned} \kappa'(v + v', w + w') &= T\alpha\kappa(v + v', w + w') \\ &= T\alpha(\kappa(v, w) + \kappa(v, w') + \kappa(v', w) + \kappa(v', w')) \\ &= \kappa'(v, w) + \kappa'(v, w') + \kappa'(v', w) + \kappa'(v', w'). \end{aligned}$$

Homogenität: Sei $a, b \in \text{GF}(q)$. Sei σ der zu κ gehörende Körperautomorphismus mit $\sigma^2 = 1$. Beachte, dass σ den Körper $\text{GF}(q)$ festlässt und somit auch ein Au-

*Kelly behauptet in [15], dass κ' für $\alpha = 1$ auch ausgeartet sein kann. Dies ist falsch. Vielleicht meint er, dass $\alpha \neq 1$ notwendig ist, damit κ' in bestimmten Fällen symplektisch wird.

[†]Die Argumente der Beweise hier zeigen (mit minimalen Ausnahmen) genau die Resultate aus [14]. Hier wurde nur darauf verzichtet, dies allgemein aufzuschreiben. Dies spiegelt sich darin wieder, dass 1. hier nur endliche Körper und endliche Dimension betrachtet werden und 2. hier die Körperreduktion konkret festgelegt wurde.

tomorphismus von $\text{GF}(q)$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\kappa'(av, bw) &= \sum_{i=0}^{e-1} \alpha^{q^i} \kappa(av, bw)^{q^i} = \sum_{i=0}^{e-1} \alpha^{q^i} a^{q^i} \kappa(v, w)^{q^i} (b^\sigma)^{q^i} \\ &= \sum_{i=0}^{e-1} \alpha^{q^i} a \kappa(v, w)^{q^i} b^\sigma = a \kappa'(v, w) b^\sigma.\end{aligned}$$

□

Lemma 3.4.2. *Die Form κ' ist nichtausgeartet.*

Beweis. Es gibt kein $v \in \text{GF}(q^e)^n$ mit $v \neq 0$, so dass für alle $w \in \text{GF}(q^e)^n$ gilt: $\kappa'(v, w) = 0$. Angenommen es gibt ein solches v . Nun gibt es ein w mit $\kappa(v, w) \neq 0$, da κ nichtausgeartet ist. Also ist für alle $\lambda \in \text{GF}(q^e)$ nun $0 = \kappa'(v, \lambda w) = T\alpha\lambda^\sigma \kappa(v, w)$. D.h. für alle $a \in \text{GF}(q^e)$ gilt $Ta = 0$. Widerspruch. Analog gibt es kein $v \in \text{GF}(q^e)^n$ mit $v \neq 0$, so dass für alle $w \in \text{GF}(q^e)^n$ gilt: $\kappa'(w, v) = 0$. □

Lemma 3.4.3. *Seien $v, w \in \text{GF}(q)^{en}$ mit $\kappa'(w, \lambda v) = 0$ für alle $\lambda \in \text{GF}(q^e)$. Dann folgt $\kappa(w, v) = 0$.*

Beweis. Nach Voraussetzung folgt aus $T\alpha\kappa(w, \lambda v) = 0$ für alle $\lambda \in \text{GF}(q^e)$ die Aussage

$$0 = T\kappa(w, \lambda v) = T\lambda^\sigma \kappa(v, w).$$

Dies impliziert wie eben $\kappa(v, w) = 0$. □

Damit folgt:

Korollar 3.4.4. *Sei V ein Unterraum von $\text{GF}(q)^{en}$ über $\text{GF}(q^e)$. Sei W ein Unterraum von $\text{GF}(q)^{en}$ über $\text{GF}(q)$ mit $\kappa'(v, w) = 0$ für alle $v \in V$ und $w \in W$. Dann folgt $\kappa(w, v) = 0$ für alle $v \in V$ und $w \in W$, d.h. $W \subseteq V^\perp$ in \mathbb{P} .*

Sei Q_κ im Folgenden eine nicht-ausgeartete quadratische Form.

Lemma 3.4.5. *Es ist $T\alpha Q_\kappa$ ein quadratische Form.*

Beweis. Sei $\lambda \in \text{GF}(q)$ und $v, w \in \text{GF}(q^e)^n$. Dann ist

$$T\alpha Q_\kappa \lambda(v) = T\alpha \lambda^2 Q_\kappa(v) = \lambda^2 T\alpha Q_\kappa(v).$$

und

$$\begin{aligned} T\alpha Q_\kappa(v+w) &= T\alpha(Q_\kappa(v) + Q_\kappa(w) - 2\kappa(v, w)) \\ &= T\alpha Q_\kappa(v) + T\alpha Q_\kappa(w) - 2T\alpha\kappa(v, w). \end{aligned}$$

□

Lemma 3.4.6. *Ist κ symmetrisch, so ist $T\alpha\kappa$ symmetrisch.*

Beweis.

$$\kappa'(v, w) = T\alpha\kappa(v, w) = T\alpha\kappa(w, v) = \kappa'(w, v)$$

□

Lemma 3.4.7. *Die Form $T\kappa Q_\kappa$ in $PG(n-1, q)$ ist nicht ausgeartet, falls q ungerade oder n gerade.*

Beweis. Die begleitende Bilinearform κ zu einer quadratischen Form Q_κ ist nur dann ausgeartet, wenn q gerade und n ungerade gilt. Damit ist auch $T\kappa$ nur in diesen Fällen ausgeartet. Entsprechend ist $T\alpha Q_\kappa$ nicht ausgeartet. □

Lemma 3.4.8. *Hat κ den Typ $H(n-1, q^{2e})$ und ist e ungerade, so hat $T\kappa$ den Typ $H(en-1, q^2)$.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \kappa'(v, w) &= \sum_{i=0}^{e-1} \kappa(v, w)^{q^{2i}} = \sum_{i=0}^{e-1} (\kappa(w, v)^{q^e})^{q^{2i}} = \sum_{i=0}^{e-1} \kappa(w, v)^{q^{2i+e}} \\ &= \begin{cases} \kappa'(w, v)^q & \text{für } e \equiv 1 \pmod{2}. \\ \kappa'(w, v) & \text{für } e \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit gilt für e ungerade $\kappa'(v, w) = \kappa'(w, v)^q$. Dies impliziert Reflexivität. Damit ist κ' in diesem Fall eine hermitesche Form. □

Lemma 3.4.9. *Ist q ungerade und $f^2 \in GF(q)$ mit $f \in GF(q^2) \setminus GF(q)$, so ist $T(f) = 0$.*

Beweis.

$$T(f) = f + f^q = f(1 + f^{(q-1)}).$$

Nun ist $f^{q-1} = (f^2)^{(q-1)/2} \in \{-1, 1\}$. Aus $f \notin GF(q)$ folgt $f^{q-1} = -1$ und damit die Behauptung. \square

Korollar 3.4.10. *Es existiert ein $\alpha \in GF(q^2)$ mit $\alpha^q = -\alpha$ und $\alpha \neq 0$.*

Beweis. Der Fall q ungerade wurde eben bewiesen, da dort ein entsprechendes f existiert. Der Fall q gerade ist wegen $\alpha = -\alpha$ klar. Wähle also $\alpha \in GF(q)$. \square

Lemma 3.4.11. *Hat κ den Typ $H(n-1, q^2)$ und ist $\alpha^q = -\alpha$, so hat $T\alpha\kappa$ den Typ $W(2n-1, q)$.*

Beweis. Betrachtet man die Reduktion von $H(n-1, q^2)$, so ist die entstehende Form

$$\kappa'(v, w) = \alpha\kappa(v, w) + \alpha^q\kappa(v, w)^q = \alpha(\kappa(v, w) - \kappa(w, v)).$$

Offensichtlich ist $\kappa'(v, v) = 0$ und damit die Form symplektisch. \square

Lemma 3.4.12. *Hat κ den Typ $W(n-1, q^e)$, so hat $T\kappa$ den Typ $W(en-1, q)$.*

Beweis. Sei κ die zu $W(n-1, q^e)$ gehörende Form. Dann gilt

$$\kappa'(v, v) = T\kappa(v, v) = T0 = 0.$$

Also ist $\kappa(v, v)$ symplektisch. \square

Lemma 3.4.13. *Hat Q_κ den Typ $Q^+(n-1, q^e)$, so hat TQ_κ den Typ $Q^+(en-1, q)$.*

Beweis. Nach 3.4.7 ist TQ_κ nicht-ausgeartet. Erzeuger von $Q^+(n-1, q^e)$ haben Rang $n/2$ und entsprechen in \mathbb{P}' total isotropen Unterräumen mit Rang $en/2$. Die Quadrik $Q^+(en-1, q)$ ist die einzige Quadrik mit so großen total isotropen Unterräumen. \square

Lemma 3.4.14. *Betrachte $GF(q^e)$ und einen Teiler f von e . Sei T_1 die Spur von $GF(q^e)$ nach $GF(q^f)$ und T_2 die Spur von $GF(q^f)$ nach $GF(q)$. Dann ist $T = T_2T_1$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} T_2T_1\alpha &= T_2 \left(\sum_{j=0}^{e/f-1} \alpha^{q^{fj}} \right) = \sum_{j=0}^{e/f-1} T_2(\alpha^{q^{fj}}) \\ &= \sum_{j=0}^{e/f-1} \sum_{i=0}^{f-1} (\alpha^{q^{fj}})^{q^i} = \sum_{j=0}^{e/f-1} \sum_{i=0}^{f-1} (\alpha^{q^{fj+i}}) = \sum_{i=0}^{e-1} (\alpha^{q^i}). \end{aligned}$$

□

Es reicht also, den Effekt einer Körperreduktion für e prim zu beschreiben. Jede weitere Körperreduktion lässt sich aus solchen Körperreduktionen zusammensetzen.

Lemma 3.4.15. *Hat Q_κ den Typ $Q(n-1, q^e)$ und ist q ungerade, so hat TQ_κ den Typ $Q(en-1, q)$.*

Beweis. Es gibt bis auf Isomorphie nur diese nichtausgeartete quadratische Form in $PG(en-1, q)$. □

Sei $GF(q)^{*2}$ die Menge der Quadrate in $GF(q)^*$ und $GF(q)^{+2}$ die Menge der Quadrate in $GF(q)$. Also $GF(q)^{+2} = GF(q) \cup \{0\}$. Bezeichne zudem die Diskriminante mit $disc$. Im Folgenden folgt ein umfangreicher Beweis für den Fall $Q(0, q^2)$ nach [14]. Nach diesem wird in einer Bemerkung ein viel elementarer Beweis vergleichsweise ausführlich skizziert.

Lemma 3.4.16. *Sei Q_κ eine nichtausgeartete quadratische Form in $PG(2m-1, q)$ mit q ungerade. Dann hat Q_κ genau dann den Typ $Q^+(2m-1, q)$, wenn $disc(Q_\kappa) \equiv (-1)^m \pmod{GF(q)^{*2}}$ gilt.*

Beweis. Siehe [16], Prop. 2.5.10. Beachte hierbei, dass -1 genau für $q \equiv 1 \pmod{4}$ ein Quadrat und $q \equiv 3 \pmod{4}$ ein Nichtquadrat ist. □

Lemma 3.4.17 (nach [14]). *Ist $Q_\kappa = \alpha x^2$, hat also den Typ $Q(0, q^2)$ und q ungerade, so hat TQ_κ den Typ*

(a) $Q^+(1, q)$, falls gilt:

- a) $\alpha^2 \in GF(q) \setminus GF(q)^{*2}$ oder
- b) $\alpha^{q+1} \not\equiv -1 \pmod{GF(q)^{*2}}$.

(b) $Q^-(1, q)$ in jedem anderen Fall. Es ist also $\alpha^2 \notin GF(q) \setminus GF(q)^{*2}$ und $\alpha^{q+1} \equiv -1 \pmod{GF(q)^{*2}}$.

Beweis. Über einer Basis $\{1, \omega\}$ von $GF(q^2)$ über $GF(q)$ lässt sich die quadratische Form $x \mapsto \alpha x^2 + (\alpha x^2)^q$ als $x \mapsto x^t M x$ mit

$$M := \begin{pmatrix} T(\alpha) & T(\alpha\omega) \\ T(\alpha\omega) & T(\alpha\omega^2) \end{pmatrix}.$$

schreiben. Als Diskriminante ergibt sich

$$\det(M) = T(\alpha)T(\alpha\omega^2) - T(\alpha\omega).$$

Sei $f^2 \in GF(q)^*$ mit $f \in GF(q^2) \setminus GF(q)$.

Es ist $\alpha^{-1}f \in GF(q)$ äquivalent zu $\alpha^2 \in GF(q) \setminus GF(q^2)$: Sei $\alpha^2 \in GF(q)$. Sei β ein Erzeuger von $GF(q^2)^*$. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $f = \beta^{(2a+1)(q+1)/2}$ und $\alpha = \beta^{(2b+1)(q+1)/2}$. Also ist $\alpha^{-1}f = \beta^{(2a+2b+2)(q+1)/2} = \beta^{(a+b+1)(q+1)} \in GF(q)$. Ist nun umgekehrt $\alpha^{-1}f \in GF(q)$, d.h. $\beta^{(2a+1)(q+1)/2}\alpha \in GF(q)$. Sei $\alpha = \beta^c$. Dann muss gelten $(q+1) \mid c + (2a+1)(q+1)/2$. Also folgt $(q+1)/2 \mid c$ und damit $\alpha^2 \in GF(q)$.

Fall 1: $\alpha^{-1}f \notin GF(q)$. Wähle $\omega = \alpha^{-1}f$. Es folgt

$$\begin{aligned} \det(M) &= T(\alpha)T(\alpha^{-1}f^2) - T(f) \\ &= f^2(\alpha + \alpha^q)(\alpha^{-1} + \alpha^{-q}) = f^2T(\alpha)^2\alpha^{-(q+1)} \end{aligned}$$

Wegen $(-1)^{-1} = -1$ folgt, dass $x \equiv -1 \pmod{GF(q)^{*2}}$ äquivalent zu $x^{-1} \equiv -1 \pmod{GF(q)^{*2}}$ ist. Zudem ist f^2 kein Quadrat. Ist also $\alpha^{q+1} \not\equiv -1 \pmod{GF(q)^{*2}}$, so ist $f^2T(\alpha)^2\alpha^{-(q+1)} \equiv -1 \pmod{GF(q)}$. Nach 3.4.16 ist der Typ $Q^+(1, q)$. Ist andererseits $\alpha^{q+1} \equiv -1 \pmod{GF(q)^{*2}}$, so folgt $f^2T(\alpha)^2\alpha^{-(q+1)} \not\equiv -1 \pmod{GF(q)}$. Nach 3.4.16 ist der Typ $Q^-(1, q)$.

Fall 2: $\alpha^{-1}f \in \text{GF}(q)$. Sei $\omega = f$. Dann ist $\alpha = f'f$ für ein $f' \in \text{GF}(q)$. Für die Diskriminante folgt

$$\det(M) = T(f'f)T(f'f^3) - T(f'f^2)^2 = (ff')^2T(f)^2 - T(f'f^2)^2 = -T(f'f^2)^2$$

Nach 3.4.16 ist der Typ $Q^+(1, q)$, da $-T(f'f)^2 \equiv -1 \pmod{\text{GF}(q)^{*2}}$ gilt. Da $\alpha^{-1}f \in \text{GF}(q)$ äquivalent zu $\alpha^2 \in \text{GF}(q) \setminus \text{GF}(q)^{*2}$ ist, folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.4.18. *Sei β ein Erzeuger von $\text{GF}(q^2)^*$ und $\alpha \in \text{GF}(q^2)^*$. Dann gilt*

(a) Sei $q \equiv 1 \pmod{4}$.

- a) Ist $\alpha = \beta^{2k}$, so gilt $\alpha^{q+1} \equiv -1 \pmod{\text{GF}(q)^{*2}}$ und $\alpha^2 \notin \text{GF}(q) \setminus \text{GF}(q)^{*2}$.
- b) Ist $\alpha = \beta^{2k+1}$, so gilt $\alpha^{q+1} \not\equiv -1 \pmod{\text{GF}(q)^{*2}}$.

(b) Sei $q \equiv 3 \pmod{4}$.

- a) Ist $\alpha = \beta^{2k+1}$, so gilt $\alpha^{q+1} \equiv -1 \pmod{\text{GF}(q)^{*2}}$ und $\alpha^2 \notin \text{GF}(q)$.
- b) Ist $\alpha = \beta^{2k}$, so gilt $\alpha^{q+1} \in \text{GF}(q)^{*2}$.

Beweis.

- (a) a) Offensichtlich gilt $\alpha^{q+1} \in \text{GF}(q)^{2*}$, also $\alpha^{q+1} \equiv -1 \pmod{\text{GF}(q)^{*2}}$. Gilt nun $\alpha^2 \in \text{GF}(q)$, so folgt $q+1 \mid 4k$. Nun ist aber 4 kein Teiler von $q+1$, also gilt $q+1 \mid 2k$. Damit ist $\alpha \in \text{GF}(q)$ und somit $\alpha^2 \in \text{GF}(q)^{*2}$.
- b) Klar, da $\alpha^{q+1} = \beta^{(2k+1)(q+1)} \notin \text{GF}(q)^{*2}$.
- (b) a) Offensichtlich gilt $\beta^{(2k+1)(q+1)} \equiv -1 \pmod{\text{GF}(q)^{*2}}$. Ist nun $(\beta^{2k+1})^2 \in \text{GF}(q)$, so folgt $q+1 \mid 2(2k+1)$. Damit folgt aber $2 \mid 2k+1$ und dieser Fall tritt somit nicht auf.
- b) Klar, da $\alpha^{q+1} = \beta^{2k(q+1)} \notin \text{GF}(q)^{*2}$.

\square

Damit lässt sich 3.4.17 anders aufschreiben.

Korollar 3.4.19. *Ist $Q_\kappa = \alpha x^2$, hat also den Typ $Q(1, q^2)$ und q ungerade, so hat TQ_κ den Typ $Q^+(1, q)$, falls*

1. $\alpha \notin GF(q^2)^{*2}$ und $q \equiv 1 \pmod{4}$ oder
2. $\alpha \in GF(q^2)^{*2}$ und $q \equiv 3 \pmod{4}$ gilt.

und den Typ $Q^-(1, q)$, falls

1. $\alpha \in GF(q^2)^{*2}$ und $q \equiv 1 \pmod{4}$ oder
2. $\alpha \notin GF(q^2)^{*2}$ und $q \equiv 3 \pmod{4}$ gilt.

Bemerkung 3.4.20. *Man kann das Ergebnis für $Q(0, q^2)$ auch dadurch beweisen, dass man die Lösungsmenge für $T(\alpha x^2)$ bzw. $(\alpha x^2)^{q-1} = -1$ direkt ausrechnet. Sei $\alpha = \gamma^a$ für einen Erzeuger γ von $GF(q^2)^*$. Eine elementare Rechnung zeigt dann, dass genau zwei Lösungen dieser Gleichung für $4 \mid q + 1 - 2a$ existieren und keine Lösung für $q \nmid q + 1 - 2a$ existiert. Die Rechnung ist im Folgenden kurz angedeutet.*

Hierzu stellt man zuerst fest, dass $T(\alpha x^2) = \alpha x^2(1 + \alpha^{q-1}x^{2(q-1)})$ gilt. Entsprechend muss die Lösungsmenge von $(\alpha x^2)^{q-1} = -1$ berechnet werden. Ist $x = \gamma^b$, so ist eine Lösung durch

$$\frac{q^2 - 1}{2} = (q - 1)(a + 2b)$$

gegeben. Man sieht nun leicht, dass $b = \frac{q + 1 - 2a}{4}$ mit x^b und x^{-b} die einzigen Lösungen sind. Damit existieren die Lösungen genau dann, wenn $4 \mid q + 1 - 2a$. Für $4 \mid q + 1$ folgt $2 \mid a$ als Bedingung, α muss also ein Quadrat sein. Für $4 \mid q - 1$ folgt $2 \mid a - 1$ als Bedingung, α muss also ein Nichtquadrat sein.

Lemma 3.4.21. *Die Lösungsmenge von $T(\alpha x^2)$ für q gerade hat θ_{e-2} Punkte.*

Beweis. Für q gerade ist $x \mapsto x^2$ ein Automorphismus und $x \mapsto Tx$ eine lineare Abbildung von $GF(q^e)$ nach $GF(q)$ mit Rang 1. Also ist $\theta_{e-2} = |\{x \mid T(x) = 0\}| = |\{x^q \mid T(x^q) = 0\}|$. □

Das folgende Resultat findet sich mit Beweis in [21] im Kapitel über Hadamard-Matrizen oder in anderer Literatur über Hadamard-Matrizen. Hier folgt ein alternativer Beweis.

Lemma 3.4.22.

(a) Sei $a \in GF(q)$ und

$$A := |\{(x, y) \in GF(q)^2 \mid a = x - y \text{ mit } x, y \in GF(q)^{+2}\}|,$$

so folgt $A = (q-1)/4$ für $a \in GF(q)^* \setminus GF(q)^{*2}$, $A = (q+3)/4$ für $a \in GF(q)^{*2}$ und $A = (q+1)/2$ für $a = 0$.

(b) Ist $q \equiv 1 \pmod{4}$, so gilt

$$A = |\{(x, y) \in GF(q)^2 \mid a = x + y \text{ mit } x, y \in GF(q)^{+2}\}|.$$

Beweis. Im Fall $q \equiv 1 \pmod{4}$ ist

$$A = |\{(x, y) \in GF(q)^2 \mid a = x + y \text{ mit } x, y \in GF(q)^{+2}\}|$$

klar, da -1 ein Quadrat ist. Sei $b \in GF(q)$. Ist $b = 0$, so hat $b = x - y$ genau $(q+1)/2$ Lösungen (x, y) . Ist $b \neq 0$, so hat $b = x - y$ für $z \in GF(q)^*$ die Lösung

$$b = \left(\frac{b}{z} + \frac{z}{4}\right)^2 - \left(\frac{b}{z} - \frac{z}{4}\right)^2.$$

Man sieht leicht, dass genau $z', -z', 4b/z'$ und $-4b/z'$ für z eingesetzt das selbe Paar Quadrate liefern. Also hat jedes $b \neq 0$ mindestens $(q-1)/4$ Lösungen. Genau dann, wenn b ein Quadrat ist, gibt es ein z' mit $z' = 4b/z'$ (mit $z' = 2\sqrt{b}$, wobei $\sqrt{b} \in GF(q)$ eine Zahl mit $\sqrt{b}^2 = b$ ist). Die $(q-1)/2$ Quadrate haben also mindestens eine weitere Lösung. Insgesamt hat man also $(q+1)/2 + (q-1)^2/4 + (q-1)/4 = (q+1)^2/4$ Lösungen gefunden. Es gibt aber jeweils nur $(q+1)^2/4$ Möglichkeiten, ein Paar (x, y) zu wählen. Also sind dies alle Lösungen. \square

Lemma 3.4.23. Hat Q_κ den Typ $Q^-(1, q^e)$ und ist e prim, so hat TQ_κ den Typ $Q^-(e-1, q)$.

Beweis. Sei $\langle v \rangle \in Q^-(1, q^e)$. Ziel ist es, die Anzahl der isotropen Punkte in $T\kappa$ auszurechnen. Gesucht sind also die $\lambda \in GF(q^e)$ mit $0 = T(\kappa(\lambda v, \lambda v)) = T(\lambda^2 \kappa(v, v))$.

Fall q gerade: Nach 3.4.21 liefert jeder anisotrope Punkt von $Q^-(1, q^e)$ genau die θ_{e-2}^q isotropen Punkten eines $e-2$ -dimensionalen Unterraums. Dies liefert

genau

$$(q^{e-1} - 1)(q^e + 1)/(q - 1) = |Q^-(e - 1, q)|$$

Punkte.

Fall q ungerade und e ungerade: Nach 3.4.15 liefert jeder anisotrope Punkt von $Q^-(1, q^e)$ genau die θ_{e-2}^q isotropen Punkten eines $Q(e - 1, q)$.

Fall q ungerade und $e = 2$: Sei a ein Nichtquadrat in $\text{GF}(q^2)$ und $x^2 - ay^2$ die zu $Q^-(1, q^2)$ gehörende quadratische Form. Schränke diese Form auf einen Punkt $\langle(x, y)\rangle$ ein und betrachte $\lambda \mapsto \alpha_{(x,y)}\lambda^2$. In homogenen Koordinaten mit $y = 1$ ist $\alpha_{(x,1)} = x^2 - a$ und $\alpha_{(1,0)} = 1$. Zähle also, wie oft $\alpha_{(x,y)}$ ein Quadrat bzw. Nichtquadrat in $\text{GF}(q^2)$ ist, um 3.4.19 anwenden zu können.

Klar ist, dass $\alpha_{(1,0)} = 1$ ein Quadrat ist. Nach 3.4.22 ist $\alpha_{(x,1)} = x^2 - a$ in $(q^2-1)/2$ Fällen ein Quadrat und in $(q^2+1)/2$ Fällen ein Nichtquadrat. Damit gibt es $(q^2+1)/2$ Formen vom Typ $Q^+(1, q)$ und $(q^2-1)/2$ Formen vom Typ $Q^-(1, q)$ (wobei es von q abhängt, ob Quadrate oder Nichtquadrate $Q^+(1, q)$ liefern). Dies ergibt genau $q^2 + 1 = Q^-(3, q)$ total isotrope Punkte. \square

Korollar 3.4.24. *Hat Q_κ den Typ $Q^-(n - 1, q^e)$ und e prim, so hat TQ_κ den Typ $Q^-(en - 1, q)$.*

Beweis. Die anisotrope Gerade ℓ von $Q^-(n - 1, q^e)$ steht auf einem $Q^+(n - 3, q^e)$ senkrecht. Damit ist TQ_κ eingeschränkt auf ℓ ein $Q^-(2e - 1, q)$ und eingeschränkt auf $Q^+(n - 3, q^e)$ ein $Q^+(e(n - 2) - 1, q)$. Der Senkrechttraum eines Erzeugers $E \in Q^+(e(n - 2) - 1, q)$ ist ein Kegel mit Spitze E und Basis $Q^-(2e - 1, q)$. Zusammen mit 3.4.4 haben damit Erzeuger in TQ_κ genau Rang $(en - 2)/2$. Es handelt sich somit um einen $Q^-(en - 1, q)$. \square

Korollar 3.4.25. *Hat Q_κ den Typ $Q(n - 1, q^e)$ und ist q ungerade sowie e gerade, so hat TQ_κ den Typ*

(a) $Q^+(en - 1, q)$, falls eine der folgenden Bedingungen gilt:

- a) $\alpha^2 \in \text{GF}(q^{e/2}) \setminus \text{GF}(q^{e/2})^{*2}$.
- b) $\alpha^{q+1} \not\equiv -1 \pmod{\text{GF}(q^{e/2})^{*2}}$.

(b) $Q^-(en - 1, q^{e/2})$ in jedem anderen Fall. Es ist also $\alpha^2 \notin \text{GF}(q^{e/2}) \setminus \text{GF}(q^{e/2})^{*2}$ und $\alpha^{q+1} \equiv -1 \pmod{\text{GF}(q^{e/2})^{*2}}$.

Beweis. Folgt direkt aus 3.4.17, 3.4.13 und 3.4.24 mit 3.4.14, da die Reduktion von $\text{GF}(q^e)$ nach $\text{GF}(q^{e/2})$ den Typ hyperbolisch oder elliptisch macht und jede weitere Körperreduktion den Typ nicht mehr verändert. \square

Analog zum Fall $Q(0, q^e)$ kann die Aussage umformuliert werden.

Korollar 3.4.26. *Hat $Q_\kappa = \alpha x_1^2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$ den Typ $Q(n-1, q^e)$ und ist q ungerade sowie e gerade, so hat TQ_κ den Typ $Q^+(en-1, q)$, falls*

1. $\alpha \notin \text{GF}(q^e)^{*2}$ und $q \equiv 1 \pmod{4}$ oder
2. $\alpha \in \text{GF}(q^e)^{*2}$ und $q \equiv 3 \pmod{4}$ gilt.

und den Typ $Q^-(en-1, q)$, falls

1. $\alpha \in \text{GF}(q^e)^{*2}$ und $q \equiv 1 \pmod{4}$ oder
2. $\alpha \notin \text{GF}(q^e)^{*2}$ und $q \equiv 3 \pmod{4}$ gilt.

Bemerkung 3.4.27. *Der Grund für 3.4.25 ist folgender: Zwar sind alle quadratischen Formen Q_κ, Q'_κ des selben Rangs **isomorph**, es sind aber Q_κ, Q'_κ nur genau dann **isometrisch**, falls $\text{disc}(f)$ und $\text{disc}(f')$ beide ein Quadrat oder beide ein Nichtquadrat sind.*

Lemma 3.4.28. *Hat κ den Typ $H(n-1, q^2)$ und ist q ungerade, so hat $T\kappa$ den Typ*

- (a) $Q^+(2n-1, q)$, falls n gerade ist.
- (b) $Q^-(2n-1, q)$, falls n ungerade ist.

Beweis. Offensichtlich gilt

$$T\kappa(v, w) = \kappa(v, w) + \kappa(w, v) = T\kappa(w, v).$$

Damit ist die Form symmetrisch. Zudem gilt

$$T\kappa(v, v) = 2\kappa(v, v) \Leftrightarrow \kappa(v, v) \neq 0.$$

Damit sind die Nullstellen von $T\kappa(v, v)$ identisch zu $\kappa(v, v)$. Wegen q ungerade ist dies identisch zu der Nullstellenmenge der quadratischen Form der Quadrik.

Der Polarraum \mathbb{P}' zu $T\kappa$ hat also genau $(q+1)|H(n-1, q^2)|$ Punkte. Ist n gerade, folgt

$$\begin{aligned} (q+1)|H(n-1, q^2)| &= (q+1)(q^{n-1} + 1)\theta_{(n-2)/2}^{q^2} \\ &= (q^n + 1)\theta_{n-1}^q = |Q^+(2n-1, q)| \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. Ist n ungerade, folgt

$$\begin{aligned} (q+1)|H(n-1, q^2)| &= (q+1)(q^n + 1)\theta_{(n-3)/2}^{q^2} \\ &= (q^n + 1)\theta_{n-2}^q = |Q^-(2n-1, q)| \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Der Beweis zum letzten Lemma in [14] nutzt ein deutlich anderes Argument, indem die Diskriminante ausgerechnet wird.

Korollar 3.4.29. *Hat κ den Typ $H(n-1, q^e)$, e gerade und ist q ungerade, so gehört $T\kappa$ zu*

- (a) $Q^+(en-1, q)$, falls n gerade ist.
- (b) $Q^-(en-1, q)$, falls n ungerade ist.

Beweis. Für erst mit 3.4.28 die Reduktion von $\text{GF}(q^e)$ nach $\text{GF}(q^{e/2})$ durch. Jede weitere Reduktion erhält den Typ der Quadrik. □

Um Kelly einen Fehler nachzuweisen, muss die Reduktion von $H(n-1, q^2)$ für gerade q noch etwas allgemeiner behandelt werden.

Lemma 3.4.30. *Hat κ den Typ $H(n-1, q^2)$ und ist q gerade, so hat $T\alpha\kappa$ für kein $\alpha \in \text{GF}(q^2)$ den Typ $Q^+(2n-1, q)$ oder $Q^-(2n-1, q)$.*

Beweis. Sei $T\kappa$ symmetrisch. Für alle $v, w \in \text{GF}(q^2)^n$ gilt also $T\alpha\kappa(v, w) = T\alpha\kappa(w, v)$. D.h.

$$\alpha\kappa(v, w) + \alpha^q\kappa(w, v) = \alpha^q\kappa(v, w) + \alpha\kappa(w, v).$$

Dies gilt genau dann wenn $\alpha^q = \alpha$. Da q gerade ist, heißt dies aber $\alpha^q = -\alpha$ und die Form wird symplektisch, also insbesondere nicht symmetrisch. □

3.4. Körperreduktionen und -ableitungen

\mathbb{P}	\mathbb{P}'	κ' bzw. TQ_κ	Bedingungen
$H(n-1, q^{2e})$	$H(en-1, q^2)$	$T\kappa$	e ungerade
$H(n-1, q^2)$	$W(2n-1, q)$	$T\alpha\kappa$	$\alpha \neq 0, T\alpha = 0$
$H(n-1, q^2)$	$W(2n-1, q)$	$T\kappa$	q gerade
$H(n-1, q^2)$	$Q^-(2n-1, q)$	$T\kappa$	n ungerade, q ungerade
$H(n-1, q^2)$	$Q^+(2n-1, q)$	$T\kappa$	n gerade, q ungerade
$W(n-1, q^e)$	$W(en-1, q)$	$T\kappa$	
$Q^+(n-1, q^e)$	$Q^+(en-1, q)$	TQ_κ	
$Q^-(n-1, q^e)$	$Q^-(en-1, q)$	TQ_κ	
$Q(n-1, q^e)$	$Q(en-1, q)$	TQ_κ	q ungerade, e ungerade
$Q(n-1, q^e)$	$Q^+(en-1, q)$	TQ_κ	q ungerade, e gerade, $\text{disc}(TQ_\kappa) \not\equiv -1 \pmod{\text{GF}(q)^{*2}}$
$Q(n-1, q^e)$	$Q^-(en-1, q)$	TQ_κ	q ungerade, e gerade, $\text{disc}(TQ_\kappa) \equiv -1 \pmod{\text{GF}(q)^{*2}}$
$Q(0, q^e)$	$Q^+(e-1, q)$	$T\alpha x^2$	$4 \mid q+1, e$ gerade, $\alpha \in \text{GF}(q^2)^{*2}$
$Q(0, q^e)$	$Q^+(e-1, q)$	$T\alpha x^2$	$4 \mid q-1, e$ gerade, $\alpha \notin \text{GF}(q^2)^{*2}$
$Q(0, q^e)$	$Q^-(e-1, q)$	$T\alpha x^2$	$4 \mid q+1, e$ gerade, $\alpha \notin \text{GF}(q^2)^{*2}$
$Q(0, q^e)$	$Q^-(e-1, q)$	$T\alpha x^2$	$4 \mid q-1, e$ gerade, $\alpha \in \text{GF}(q^2)^{*2}$

Abbildung 3.2: Tabelle der Isomphietypen für Körperreduktionen nach Kelly (mit einigen Doppelungen als Spezialfälle).

3.4.2 Intriguing Sets durch Körperreduktionen

Im Folgenden sei \mathbb{P}' der zur Form κ' gehörende Polarraum. Ziel ist es, zu zeigen, dass ein Intriguing Set \mathcal{I} von \mathbb{P} ein Intriguing Set $\mathcal{I}' := \mathcal{R}(\mathcal{I})$ induziert. Der Beweis ist im Wesentlichen identisch zu Kelly.

Sei im Folgenden b die zu κ gehörige Bilinearform. Dann gilt

Lemma 3.4.31. *Sei $P \in PG(n, q^e)$ und $Q \in \mathbb{P}$, so dass $b(u, v) \neq 0$ für alle Vektoren $u \in Q$ und $v \in P$ mit $u, v \neq 0$ gilt. Dann ist jeder Punkt $\mathbb{P}' \in \mathcal{R}(P)$ mit genau $\frac{q^{e-1} - 1}{q - 1}$ Punkten aus $\mathcal{R}(Q)$ kollinear.*

Beweis. Die Einschränkung der Abbildung $w \mapsto b(w, v)$ auf den Punkt Q ist eine Bijektion in $GF(q^e)$. Die $GF(q)$ -lineare Abbildung $L : GF(q^e) \rightarrow GF(q)$ mit $z \mapsto T\alpha z$ hat vollen Rang. Damit gibt es genau q^{e-1} Vektoren im Kern von L , d.h. die $T\alpha b(w, v) = 0$ erfüllen. Diese Vektoren bilden somit einen Unterraum W über $GF(q)$ des Rangs $e - 1$. Damit enthält W genau θ_{e-2} Punkte von \mathbb{P}' . \square

Lemma 3.4.32. *Sei $P \in PG(n, q^e)$, $P' \in \mathcal{R}(P) \cap \mathbb{P}'$ und sei $A \subseteq S$ eine Punktmenge von \mathbb{P} . Sei des Weiteren $\alpha := |P^\perp \cap A|$ und $\beta := |A|$. Dann gilt*

$$|P'^\perp \cap \mathcal{R}(A)| = \alpha q^{e-1} + \beta \theta_{e-2}.$$

Beweis. Sei $Q \in A$. Ist $Q \notin P^\perp$, so sind nach Lemma 3.4.31 genau θ_{e-2} Punkte von $\mathcal{R}(Q)$ in P'^\perp . Ist $Q \in P^\perp$, so liegt nach Definition von κ der total isotrope

Unterraum $\mathcal{R}(Q)$, d.h. θ_{e-1} Punkte, in P'^\perp . Es gibt α Punkte in P^\perp und $\beta - \alpha$ Punkte in $A \setminus P^\perp$, also

$$|P'^\perp \cap \mathcal{R}(A)| = \alpha\theta_{e-1} + (\beta - \alpha)\theta_{e-2} = \alpha q^{e-1} + \beta\theta_{e-2}.$$

□

Nun folgt der angekündigte Satz.

Satz 3.4.33. *Sei \mathcal{I} ein Intriguing Set eines Polarraums \mathbb{P} mit $\alpha := |P^\perp \cap \mathcal{I}|$ für $P \in \mathbb{P} \setminus \mathcal{I}$. Gilt $|Q^\perp \cap \mathcal{I}| = \alpha$ für jeden Punkt $Q \in PG(n, q^e) \setminus \mathbb{P}$, so ist $\mathcal{I}' = \mathcal{R}(\mathcal{I})$ ein Intriguing Set von \mathbb{P}' . D.h. ein m -Ovoid von \mathbb{P} ist ein $m\theta_{e-1}$ -Ovoid von \mathbb{P}' und ein x -Tight Set von \mathbb{P} ist ein x -Tight Set von \mathbb{P}' .*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für $P' \in \mathbb{P}'$ nur zwei verschiedene Zahlen $|P'^\perp \cap \mathcal{I}'|$ auftreten. Der Punkt P' liegt in $\mathcal{R}(\mathcal{I})$, $\mathcal{R}(\mathbb{P}) \setminus \mathcal{R}(\mathcal{I})$ oder $\mathbb{P}' \setminus \mathcal{R}(\mathbb{P})$. In diesen drei Fällen kann man mit 3.4.31 und 3.4.32 die Schnitzzahlen berechnen.

$P' \in \mathcal{R}(\mathcal{I}) = \mathcal{I}'$: der Punkt P steht auf $(q^{r-1} - 1) + x\theta_{r-2}$ Punkten von \mathcal{I} senkrecht. Nach Lemma 3.4.32 folgt damit, dass P' auf

$$|P^\perp \cap \mathcal{I}|q^{e-1} + |\mathcal{I}|\theta_{e-2}$$

Punkten von \mathcal{I}' senkrecht steht.

$P' \in \mathcal{R}(\mathbb{P}) \setminus \mathcal{R}(\mathcal{I})$ oder $P' \in \mathbb{P}' \setminus \mathcal{R}(\mathbb{P})$: beide Fälle ergeben genau dann die selbe Schnitzzahl, wenn $|P^\perp \cap \mathcal{I}| = |Q^\perp \cap \mathcal{I}|$ für alle $P, Q \in PG(n, q^e) \setminus \mathcal{I}$ gilt. Dann steht in beiden Fällen jeder Punkt P' auf

$$|P^\perp \cap \mathcal{I}|q^{e-1} + |\mathcal{I}|\theta_{e-2}$$

Punkten von \mathcal{I}' senkrecht. Jedes Intriguing Set in einem Polarraum ist ein m -Ovoid oder ein x -Tight Set. Zudem wurde für $P \in \mathcal{I}$ und $Q \in \mathcal{I}$ gezeigt:

$$|P^\perp \cap \mathcal{I}| \geq |Q^\perp \cap \mathcal{I}| \Leftrightarrow |P^\perp \cap \mathcal{I}'| \geq |Q^\perp \cap \mathcal{I}'|.$$

Damit bleibt ein x -Tight Set ein x' -Tight Set und ein m -Ovoid ein m' -Ovoid. Ein Vergleich der Parameter zeigt, dass ein x -Tight Set ein x -Tight Set bleibt und aus einem m -Ovoid ein $m\theta_{e-1}$ -Ovoid wird:

Die Menge \mathcal{I}' hat $|\mathcal{I}'|\theta_{e-1}^q$ Punkte. Ist also \mathcal{I} ein x -Tight Set und r der Rang eines Erzeugers in \mathbb{P} , folgt

$$|\mathcal{I}'| = x\theta_{r-1}^{q^e}\theta_{e-1}^q = x\theta_{er-1}^q.$$

Ist \mathcal{I} ein m -Ovoid, folgt mit $\vartheta_{\mathbb{P}} - 1 = (q^e)^n = q^{en} = \vartheta_{\mathbb{P}'} - 1$ für alle in Frage kommenden \mathbb{P} und \mathbb{P}' (also $\mathbb{P} \in \{H(n-1, q^{2e}), W(2r-1, q^e), Q^-(n-1, q^e)\}$, siehe z.B. Abschnitt 4.2)

$$|\mathcal{I}'| = m\vartheta_{\mathbb{P}}\theta_{e-1}^q = m\theta_{e-1}^q\vartheta_{\mathbb{P}'}.$$

□

Dies führt zu den folgenden Ergebnissen*:

Korollar 3.4.34.

(a) *Besitzt $H(2r, q^{2e})$ ein m -Ovoid, dann besitzt*

- $H(e(2r+1) - 1, q^2)$ ein $m\theta_{e-1}^{q^2}$ -Ovoid für ungerade e .
- $W(2e(2r+1) - 1, q)$ ein $m\theta_{2e-1}^q$ -Ovoid.
- $Q^-(2e(2r+1) - 1, q)$ ein $m\theta_{2e-1}^q$ -Ovoid für q ungerade.

(b) *Besitzt $H(2r-1, q^{2e})$ ein x -Tight Set, dann besitzt*

- $H(e(2r-1) - 1, q^2)$ ein x -Tight Set für ungerade e .
- $W(4er - 1, q)$ ein x -Tight Set.
- $Q^+(4er - 1, q)$ ein x -Tight Set für q ungerade.

Besitzt $W(2r-1, q^e)$ ein m -Ovoid bzw. x -Tight Set, so besitzt $W(2re-1, q)$ ein $m\theta_{e-1}^q$ -Ovoid bzw. ein x -Tight Set.

Besitzt $Q^+(2r-1, q^e)$ ein x -Tight Set, so besitzt $Q^+(2re-1, q)$ ein x -Tight Set.

Besitzt $Q^-(2r+1, q^e)$ ein m -Ovoid, so besitzt $Q^-(e(2r+2)-1, q)$ ein θ_{e-1}^q -Ovoid.

Beweis. In all diesen Fällen sieht man mit 3.2.1, dass $|P^\perp \cap \mathcal{I}| = |Q^\perp \cap \mathcal{I}|$ für alle $P \in \text{PG}(n, q^e) \setminus \mathbb{P}$ und $Q \in \mathbb{P} \setminus \mathcal{I}$ gilt, da $P^\perp \cap \mathcal{I}$ ein Intriguing Set ist:

*Kelly ignoriert in [15], dass ein hermitescher Polarraum für q gerade keine Quadrik liefert. Entsprechend ist das Ergebnis hier abgeändert.

Für $H(2r, q^{2e})$ ist

$$|P^\perp \cap \mathcal{I}| = m(1 + q^{e(2r-1)}) = |Q^\perp \cap \mathcal{I}|.$$

Für $H(2r - 1, q^{2e})$ ist

$$|P^\perp \cap \mathcal{I}| = x\theta_{r-2}^{q^2} = |Q^\perp \cap \mathcal{I}|$$

und analog für die verbleibenden Polarräume. Solche Schnittzahlen wurden schon hinreichend im Abschnitt über Hyperebenen behandelt und werden ebenso nochmal ausführlich in Abschnitt 4.2 berechnet. \square

3.5 m -Systems

Shult und Thas stellen in [26] m -Systems, eine Verallgemeinerung von **Ovoiden** und **Faserungen**, vor. Allgemein ist die wesentliche Erkenntnis, die in [26] vorgestellt wird, ein Zusammenhang zwischen Ovoiden und Faserungen. In dem speziellen Kontext dieser Arbeit sind m -Systems deswegen interessant, weil jedes m -System ein θ_m -Ovoid ist. Die Literatur zu m -Systems liefert also eine Fülle an Beispielen für θ_m -Ovoiden. Hier werden m -Systems ausschließlich unter dem Aspekt betrachtet, dass es sich um θ_m -Ovoiden handelt. Bei der Konstruktion von m' -Systems wird sich also teilweise darauf beschränkt, festzustellen, dass es sich um $\theta_{m'}$ -Ovoiden handelt.

Definition 3.5.1. Sei \mathbb{P} ein klassischer endlicher Polarraum von Rang $r \geq 2$. Ein **partielles m -System** von \mathbb{P} mit $0 \leq m \leq r - 1$ ist eine Menge von $k > 0$ total singulären m -dimensionalen Unterräumen U_1, U_2, \dots, U_k , so dass für alle $i \neq j$

$$U_i^\perp \cap U_j = \emptyset$$

gilt.

Ein partielles 0-System entspricht einem partiellen Ovoiden. Ein partielles $(r - 1)$ -System entspricht einer partiellen Faserung.

Satz 3.5.2. *Sei M ein partielles m -System des Polarraums \mathbb{P} . Dann gilt*

$$|M| \leq \vartheta_r.$$

Beweis. Es sei

$$\tilde{M} := \bigcup_{U \in M} U.$$

Ein partielles $(r-1)$ -System ist eine Teilfaserung der Punktmenge von \mathbb{P} in Erzeuger. Ein Erzeuger hat θ_{r-1} Punkte. Mit $\mathbb{P} = \vartheta_r \theta_{r-1}$ folgt die Behauptung.

Sei nun $m < r-1$. Sei $\alpha := |M|$, $A_r := \vartheta_r \theta_{r-1}$ die Anzahl der Punkte eines Polarraums vom selben Typ wie \mathbb{P} und \mathcal{W} die Menge der $(m+1)$ -dimensionalen Unterräume W , für die ein $U \in M$ mit $U \subseteq W$ existiert. Sei des Weiteren für $P_i \in \mathbb{P} \setminus \tilde{M}$

$$t_i := |\{W \in \mathcal{W} \mid P_i \in W\}|.$$

Zähle die Paare (P_i, ξ) mit $P_i \in \mathbb{P} \setminus \tilde{M}$ und $\xi \in \mathcal{W}$ doppelt ab. Durch jeden Punkt P_i gehen genau t_i Unterräume aus \mathcal{W} . Andererseits ist für $U \in M$

$$|U^\perp \setminus U| = q^{m+1} A_{r-m-1}.$$

Es folgt

$$\sum t_i = \alpha q^{m+1} A_{r-m-1}.$$

Zähle als nächstes die Tripel (P_i, ξ, ξ') mit $P_i \in \mathbb{P} \setminus M$, $\xi, \xi' \in \mathcal{W}$, $\xi \neq \xi'$ und $P_i \in \xi \cap \xi'$. Für die Unterräume $U, \tilde{U} \in M$ gilt

$$|U^\perp \cap \tilde{U}^\perp| = A_{r-m-1},$$

also folgt

$$\sum t_i(t_i - 1) = \alpha(\alpha - 1) A_{r-m-1}.$$

Dann lässt sich schreiben

$$|\mathbb{P} \setminus \tilde{M}| = A_r - \alpha \theta_m.$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwartz gilt

$$|\mathbb{P} \setminus \tilde{M}| \sum t_i^2 - \left(\sum t_i \right)^2 \geq 0.$$

Nun folgt

$$\sum t_i^2 = \left(\sum t_i(t_i - 1) \right) + \sum t_i = \alpha A_{r-m-1} (\alpha - 1 + q^{m+1})$$

und

$$\left(\sum t_i \right)^2 = \alpha^2 q^{2m+2} A_{r-m-1}^2$$

womit folgt (geteilt durch $\alpha A_{r-m-1} \theta_m$)

$$\alpha^2 + \alpha \left((q^{m+1} - 1) - A_r/\theta_m + A_{r-m-1} q^{2m+2}/\theta_m \right) - A_r(q-1) \leq 0.$$

Eine einfache Rechnung zeigt nun die Behauptung. Es gilt

$$\begin{aligned} A_r - A_{r-m-1} q^{2m+2} &= \vartheta_r \theta_{r-1} - \vartheta_{r-m-1} q^{m+1} \theta_{r-m-2} q^{m+1} \\ &= \vartheta_r \theta_{r-1} - (\vartheta_r - 1 + q^{m+1}) (\theta_{r-1} - \theta_m) \\ &= \vartheta_r \theta_m - (q^{m+1} - 1) (\theta_{r-1} - \theta_m). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} &(q^{m+1} - 1) - A_r/\theta_m + A_{r-m-1} q^{2m+2}/\theta_m \\ &= q^{m+1} - 1 - \vartheta_r - (q^{m+1} - 1) + (q^{m+1} - 1) \theta_{r-1}/\theta_m \\ &= \theta_{r-1}(q-1) - \vartheta_r = q^r - 1 - \vartheta_r. \end{aligned}$$

Dies liefert für α die gesuchte Schranke:

$$\begin{aligned}\alpha &\leq \frac{\vartheta_r - q^r + 1}{2} + \sqrt{(\vartheta_r - q^r + 1)^2/4 + \vartheta_r(q^r - 1)} \\ &= \frac{\vartheta_r - q^r + 1}{2} + \sqrt{(\vartheta_r + q^r - 1)^2/4} = \vartheta_r.\end{aligned}$$

□

Definition 3.5.3. Ein partielles m -System M heißt **m -System**, wenn M die Schranke in Satz 3.5.2 mit Gleichheit erfüllt, d.h. $|M| = \vartheta_r$ gilt.

Korollar 3.5.4. Für ein m -System M ist (mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von 3.5.2) gilt für alle i

$$t_i = \vartheta_{r-m-1}.$$

Beweis. Gilt Gleichheit 4.1.4, so muss t_i für alle i den selben Wert annehmen und es gilt

$$\begin{aligned}t_i &= \sum t_i / |\mathbb{P} \setminus \tilde{M}| \\ &= \frac{\vartheta_r q^{m+1} \vartheta_{r-m-1} \theta_{r-m-2}}{\vartheta_r \theta_{r-1} - \vartheta_r \theta_m} \\ &= \frac{q^{m+1} \vartheta_{r-m-1} \theta_{r-m-2}}{\theta_{r-1} - \theta_m} = \vartheta_{r-m-1}.\end{aligned}$$

□

Korollar 3.5.5. Ein m -System ist ein θ_m -Ovoid.

Beweis. Sei M ein m -System. Ein Punkt $P \in \tilde{M}$ steht auf dem Element $U \in M$ mit $P \in U$ senkrecht, alle anderen Elemente von U schneidet P^\perp in einem $(m-1)$ -dimensionalen Raum. Es folgt

$$\begin{aligned}|P^\perp \cap \tilde{M}| &= \theta_m + (\vartheta_r - 1)\theta_{m-1} \\ &= \theta_m + (\theta_m - 1)(\vartheta_{r-1} - 1) \\ &= (\theta_m - 1)\vartheta_{r-1} + 1.\end{aligned}$$

Ein Punkt $P \in \mathbb{P} \setminus \tilde{M}$ ist nach 3.5.4 auf ϑ_{r-m-1} Elementen von M senkrecht, die weiteren $\vartheta_r - \vartheta_{r-m-1}$ Elemente werden in $(m-1)$ -dimensionalen Unterräumen

getroffen. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
|P^\perp \cap \tilde{M}| &= \vartheta_{r-m-1}\theta_m + (\vartheta_r - \vartheta_{r-m-1})\theta_{m-1} \\
&= \vartheta_r\theta_{m-1} + \vartheta_{r-m-1}q^m \\
&= (q\vartheta_{r-1} - q + 1)\theta_{m-1} + \vartheta_{r-1} + q^m - 1 \\
&= \vartheta_{r-1}\theta_m.
\end{aligned}$$

Damit handelt es sich um einen θ_m -Ovoid. \square

In [26] finden sich noch eine Reihe an Konstruktionen von Intriguing Sets durch Körperreduktionen. Es handelt sich hierbei jeweils um Spezialfälle von 3.4.34. Deswegen wird hier nicht weiter darauf eingegangen.

Vergleichsweise umständlich ist es, Teil (a) des Theorems 13 in [26] mit 3.4.34 nachzuvollziehen. Es besagt:

Lemma 3.5.6. *Ein m -System von $Q(2r, q^2)$ liefert ein m' -System von $Q^+(4r + 1, q)$. Ist q gerade, liefert es auch ein m' -System von $Q(4r, q)$.*

Als Intriguing Set betrachtet, ist also zu zeigen, dass ein m -Ovoid von $Q(2r, q^2)$ einen m' -Ovoid von $Q^+(4r + 1, q)$ bzw. für q gerade auch $Q(4r, q)$ liefert (m und m' sind natürlich nicht identisch zu denen im Lemma). Wie bereits bekannt, ist ein m -Ovoid von $Q(2r, q^2)$ auch ein m -Ovoid von $Q^+(2r, q^2)$ und dieser liefert wiederum einen m' -Ovoiden von $Q^+(4r + 1, q)$ per Körperreduktion. Dies liefert den ersten Teil der Aussage. Ist nun q gerade, ist $Q(2r, q^2)$ isomorph zu $W(2r - 1, q^2)$ und $Q(4r, q)$ isomorph zu $W(4r - 1, q)$. Die Körperreduktion von $W(2r - 1, q^2)$ nach $W(4r - 1, q)$ liefert sofort, dass ein m -Ovoid von $Q(2r, q^2)$ einen m' -Ovoid von $Q(4r, q)$ induziert.

Für diese Arbeit interessant ist noch die folgende Konstruktion von θ_2 -Ovoiden des $Q^+(7, q)$. Sie nutzt aus, dass in $Q^+(7, q)$ eine Faserung existiert und es zwei Typen 1 und 2 von Erzeugern gibt.

Lemma 3.5.7. *Seien S_1 und S_2 Faserungen von $Q^+(7, q)$, wobei S_1 aus Erzeugern von Typ 1 und S_2 aus Erzeugern von Typ 2 besteht. Dann existiert zu jedem Erzeuger aus S_1 genau ein Erzeuger aus S_2 , so dass sich die Erzeuger in einer Ebene schneiden. Diese $q^3 + 1$ Ebenen bilden ein 2-System von $Q^+(7, q)$.*

Beweis. Ein Erzeuger von S_1 hat θ_3 Punkt und wird durch die Erzeuger von S_2 partitioniert. Erzeuger verschiedenen Typs schneiden sich in 1 oder θ_2 Punkten. Also ein Erzeuger aus S_2 trifft genau einen Erzeuger aus S_1 in einer Ebene π .

Da π nur in zwei Erzeugern liegt und π^\perp somit keine andere solche Ebene trifft, handelt es sich um ein 2-System. \square

3.6 Irreduzible Tight Sets durch Überdecken eines Erzeugers

Die folgenden Konstruktionen wurden von Linda Beukemann und dem Autor gefunden und sind bisher unveröffentlicht. Dem Autor sind keine weiteren Quellen für diese Konstruktionen bekannt, obwohl sie sich sofort aus 3.1.2 ergeben.

Wählt man eine Menge von Erzeugern \mathcal{U} , so dass es einen Erzeuger $G \notin \mathcal{U}$ mit

$$G \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U,$$

so ist

$$\left(\sum_{U \in \mathcal{U}} U \right) - \alpha G$$

für ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{Z}$ offensichtlich ein nicht-negatives $(|\mathcal{U}| - \alpha)$ -Tight Set.

Lemma 3.6.1. (a) *Es gibt für jeden klassischen Polarraum \mathbb{P} der Dimension d ein nicht-negatives q -Tight Set \mathcal{T} , so dass ein Unterraum der Dimension $d-2$ nur Punkte mit Gewicht q enthält und alle anderen Punkte Gewicht 1 oder 0 haben.*

(b) *Ist \mathbb{P} nicht hyperbolisch, so kann man \mathcal{T} nicht als Summe ungewichteter Erzeugern schreiben.*

Beweis. Sei G ein Erzeuger von \mathbb{P} . Wähle eine Cogerade g von G . Durch g gibt es $q+1$ Hyperebenen von G . Wählt man nun eine Menge \mathcal{U} von $q+1$ Erzeugern mit $G \notin \mathcal{U}$ durch g , so dass jede der $q+1$ Hyperebenen durch genau einen Erzeuger überdeckt wird, so überdecken diese Erzeuger offensichtlich G . Die Menge

$$\mathcal{T} := \left(\sum_{U \in \mathcal{U}} U \right) - G$$

ist somit ein q -Tight Set.

Ist \mathcal{T} ist eine Summe von q Erzeugern, so treffen diese jeweils G genau in g . Im hyperbolischen Fall sind dies die q Erzeuger eindeutig als die Erzeuger E festgelegt, für die gilt:

- E hat den selben Typ wie G ,
- $E \neq G$ und
- $g \subseteq E$.

Diese Erzeuger treffen sich nur in g , treffen aber jedes Element von \mathcal{U} in einem $d - 1$ dimensionalen Unterraum. Also entsprechen diese q Erzeuger genau dem q -Tight Set.

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{U} im nicht-hyperbolischen Fall so gewählt werden kann, dass \mathcal{T} keine Summe von Erzeugern ist.

Seien E_1, \dots, E_q die q Erzeuger, die \mathcal{T} überdecken. Jeder Punkt in g hat Gewicht q , also muss jeder Erzeuger E_i als Cogerade g enthalten. Seien U_1 und U_2 Erzeuger von \mathcal{U} . Ein Erzeuger E_i trifft U_1 in einer Hyperebene h_i von U_1 . Nur die Punkte in g haben ein Gewicht größer als 1, also gilt $h_i \neq h_j$ für $i \neq j$. Natürlich gilt $E_i \subseteq h_i^\perp$ und insbesondere $E_i \cap U_2 = h_i^\perp \cap U_2$. Also sind E_1, \dots, E_q schon durch zwei Erzeuger aus \mathcal{U} eindeutig bestimmt.

Die Menge \mathcal{U} hat $q + 1$, also mindestens 3, Elemente. Genauso gibt es im nicht-hyperbolischen Fall mindestens zwei Möglichkeiten für die Wahl jedes Erzeugers für \mathcal{U} . Damit lassen sich die Erzeuger von \mathcal{U} so wählen, dass \mathcal{T} keine Summe von Erzeugern ist. \square

Die Konstruktion basiert darauf, eine blockierende Menge von Hyperebenen eines Erzeugers bzgl. Punkten zu wählen (ein Cover). Ist q ein Quadrat, so hat nach [27] die zweitkleinste solche Menge $q + \sqrt{q} + 1$ Punkte, es gibt also ein gewichtetes $(q + \sqrt{q})$ -Tight Set in $Q^+(5, q)$, dass keine Summe von Erzeugern ist. Allgemein gibt es nach [27] immer eine solche blockierende Menge mit $3(q + 1)/2$ bzw. $3(q + 2)/2$ Punkten (für q ungerade bzw. gerade), so dass für alle q ein $3(q - 1)/2$ - bzw. $3q/2$ -Tight Set existiert, dass keine Vereinigung von Erzeugern ist.

Lemma 3.6.2. *Die beschriebene Konstruktion liefert für die genannten blockierenden Mengen in $Q^+(5, q)$ Tight Sets, die keine Summe von Erzeugern sind.*

Beweis. Verwendet man die Konstruktion für alle genannten blockierenden Mengen, erhält man in G zwei Punkte P und Q mit einem Gewicht größer als 0 nach dem einmaligen Entfernen von G , so dass durch PQ ein Erzeuger $U \in \mathcal{U}$ geht. Hat G den Typ 1, so besteht \mathcal{U} aus Erzeugern vom Typ 2. Angenommen, das entstehende Tight Set sei eine Summe von Erzeugern. Da G nach dem Entfernen von G keine Geraden mehr enthält, müssen P und Q beide durch Erzeuger $G_1 \neq G_2$ von Typ 1 getroffen werden. Es sind $G_1 \cap U$ und $G_2 \cap U$ Geraden, die sich in $U \setminus G$ treffen. Damit enthält das entstehende Tight Set einen Punkt $P \in U \setminus G$ mit Gewicht 2. Nach Konstruktion können aber nur Punkte in G ein Gewicht größer als G haben, da sich die Erzeuger aus \mathcal{U} nur in G treffen. Widerspruch. \square

Ähnlich lassen sich auch ungewichtete Tight Sets konstruieren, in dem man darauf achtet, dass vor dem Entfernen des Erzeugers G jeder Punkt in G das gleiche Gewicht hat.

Sei hierzu G ein Erzeuger eines Polarraums \mathbb{P} mit Rang r . Sei \mathcal{H} die Menge der Hyperebenen von G . Sei $f : \mathcal{H} \rightarrow \Sigma \setminus \{G\}$ eine Abbildung mit $H \subseteq f(H)$ für $H \in \mathcal{H}$ in die Menge der Erzeuger Σ ohne G .

Lemma 3.6.3. *Es ist*

$$\left(\sum_{H \in \mathcal{H}} f(H) \right) - \theta_{r-2}G$$

ein ungewichtetes q^{r-1} -Tight Set.

Beweis. Hier ist also $\mathcal{U} = \{f(H) \mid H \in \mathcal{H}\}$. Keine zwei Erzeuger aus \mathcal{U} treffen sich außerhalb von G in einem Punkt P : Angenommen, dem sei so. Dann steht P auf G komplett senkrecht. Also enthält \mathbb{P} einen total isotropen Unterraum des Rangs $r + 1$. Widerspruch. Damit ist das entstehende Tight Set ungewichtet. Wegen $|\mathcal{H}| = \theta_{r-1}$ ist es ein q^{r-1} -Tight Set. \square

Lemma 3.6.4. *Für $r \equiv 0 \pmod{2}$ existiert eine Faserung \mathcal{F} eines Erzeugers. Dann ist*

$$\left(\sum_{H \in \mathcal{F}} f(H) \right) - G$$

ein ungewichtetes $q^{r/2}$ -Tight Set.

Beweis. Hier ist also $\mathcal{U} = \{f(H) \mid H \in \mathcal{F}\}$. Wie eben treffen sich keine zwei Erzeuger von \mathcal{U} außerhalb von G . Also ist das entstehende Tight Set ungewichtet. Wegen $|\mathcal{H}| = q^{r/2} + 1$ ist es ein $q^{r/2}$ -Tight Set. \square

4 Existenzresultate

In diesem Kapitel soll auf ausgewählte **Existenzresultate** zu Intriguing Sets eingegangen werden. Hierzu wird in Abschnitt 4.1 der Begriff der projektiven Menge eingeführt, um damit in 4.2 die Nichtexistenz bestimmter m -Ovoide beweisen zu können. In Abschnitt 4.3 wird dann ein Resultat, dass die Struktur von kleinen Tight Sets in $Q^+(5, q)$ beschreibt, vorgestellt und auf **nicht-negativ gewichtete Tight Sets** verallgemeinert.

4.1 Differenzmengen und Projektive Mengen

Calderbank und Kantor haben in [8] bestimmte **projektive Codes** untersucht und dazu **projektive $(m, n + 1, h_1, h_2)$ -Mengen** und deren Beziehung zu stark regulären Graphen betrachtet.

Definition 4.1.1. *Eine projektive $(m, n + 1, h_1, h_2)$ -Menge M ist eine nichtleere Punktmenge des Raumes $PG(n, q)$ mit $|M| = m$, so dass jede Hyperebene M entweder in h_1 oder in h_2 Punkten trifft.*

Calderbank und Kantor brachten solche projektive Mengen in Beziehung zu **$\{\lambda_1, \lambda_2\}$ -Differenzmengen**.

Definition 4.1.2. *Sei Ω eine nicht-leere Menge von Vektoren aus $V \setminus \{0\}$, wobei V ein Vektorraum über $GF(q)$ ist. Dann heißt Ω genau dann **Differenzmenge** über $GF(q)$, wenn*

$$GF(q)^*\Omega = \Omega$$

und für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt

$$|\{(x, y) \mid x, y \in \Omega \text{ und } x - y = v\}| = \begin{cases} \lambda_1, & \text{falls } v \in \Omega. \\ \lambda_2, & \text{falls } v \notin \Omega. \end{cases}$$

Sei Ω eine Menge von Vektoren aus $V = \text{GF}(q)^K$ mit $\Omega = -\Omega$ und $0 \notin \Omega$. Definiere $G(\Omega)$ als einen Graph mit V als Knotenmenge, in dem zwei Knoten v und w genau dann verbunden sind, wenn $v - w \in \Omega$ gilt.

Die Anzahl der gemeinsamen Nachbarn von zwei Knoten v, w des Graphen ist

$$\begin{aligned} & |\{u \in V \mid v - u \in \Omega, w - u \in \Omega\}| \\ &= |\{u \in V, (x, y) \mid v - u = x, w - u = y, x, y \in \Omega\}| \\ &= |\{(x, y) \mid v - w = x - y, x, y \in \Omega\}|. \end{aligned}$$

Damit ist $G(\Omega)$ offensichtlich genau dann stark regulär mit

$$\begin{aligned} N = |V| &= q^{n+1}, & k &= |\Omega|, \\ \lambda &= \lambda_1, & \mu &= \lambda_2, \end{aligned}$$

wenn Ω eine Differenzmenge ist. Beachte, dass von der Bedingung $\text{GF}(q)^*\Omega = \Omega$ an Differenzmengen nur $\Omega = -\Omega$ benutzt wurde. Im Folgenden soll ein Zusammenhang zwischen Differenzmengen und projektiven Mengen hergestellt werden.

Bemerkung 4.1.3. *Die in 3.4.22 betrachtete Menge ist fast eine Differenzmenge. Allerdings ist dort die Bedingung $\text{GF}(q)^*\Omega = \Omega$ nicht erfüllt. Es gilt aber $\Omega = -\Omega$. Damit ist $G(\Omega)$ also stark regulär.*

Betrachte hierzu eine Menge Ω mit $\text{GF}(q)^*\Omega = \Omega$ und $\langle \Omega \rangle = V$ und m , so dass $m(q-1) = |\Omega|$. Ordne die Vektoren v_1, \dots, v_N von V , um eine Adjazenzmatrix $A = (a_{ij})$ von $G(\Omega)$ zu definieren. Sei $\chi : \text{GF}(q) \rightarrow \mathbb{C}^*$ ein Homomorphismus der additiven Gruppe von $\text{GF}(q)$ mit $\chi(a) \neq 1$ für mindestens ein $a \in \text{GF}(q)$ auf den Einheitskreis.

So ein Homomorphismus existiert: Betrachte $\text{GF}(q)$ als Vektorraum über $\text{GF}(p)$ mit p prim. Sei $\{v_1, \dots, v_d\}$ eine Basis von $\text{GF}(q)$ über $\text{GF}(p)$. Setze nun

$$\chi(v_j) := e^{2\pi i/p}.$$

Hierdurch ist χ eindeutig bestimmt, da $v = \sum k_j v_j$ auf $\exp(2\pi i (\sum k_j) / p)$ abgebildet wird, und ein Homomorphismus mit $\chi(v_1) \neq 1$.

Für $u \in V$ ist dann $\chi_u(v) := \chi(u^t v)$ ein Homomorphismus der additiven Gruppe von V nach \mathbb{C} . Definiere den Vektor $e_v \in \mathbb{C}^N$ als

$$(e_v)_i := \chi_v(v_i) \tag{4.1.4}$$

für $i = 1, \dots, N$.

Lemma 4.1.5. *Der Vektor e_v ist ein Eigenvektor von A mit Eigenwert $(q - 1)(m - w_v) - w_v$ wobei w_v definiert ist durch $(q - 1)(m - w_v) = |v^\perp \cap \Omega|$. Die Vektoren e_v mit $v \in V$ bilden eine Basis von \mathbb{C}^N .*

Beweis. Der Vektor e_v ist ein Eigenvektor, denn es gilt

$$\begin{aligned} (e_v A)_j &= \sum_i \chi_v(v_i) a_{ij} \\ &= \sum_{v_i - v_j \in \Omega} \chi_v(v_i) a_{ij} + \sum_{v_i - v_j \notin \Omega} \chi_v(v_i) a_{ij} \\ &= \sum_{v_i - v_j \in \Omega} \chi_v(v_i) = \sum_{u \in \Omega} \chi_v(u + v_j) \\ &= \left(\sum_{u \in \Omega} \chi_v(u) \right) \chi_v(v_j) = \left(\sum_{u \in \Omega} \chi_v(u) \right) (e_v)_j. \end{aligned}$$

Für χ gilt für das $a \in \text{GF}(q)$ mit $\chi(a) \neq 1$:

$$\sum_{b \in \text{GF}(q)} \chi(b) = \sum_{b \in \text{GF}(q)} \chi(a + b) = \chi(a) \sum_{b \in \text{GF}(q)} \chi(b).$$

Da $\chi(a) \neq 1$ vorausgesetzt wurde, muss $\sum_{b \in \text{GF}(q)} \chi(b) = 0$ gelten. Also folgt aus $\chi(0) = 1$ die Gleichung

$$\sum_{\alpha \in \text{GF}(q)^*} \chi(\alpha) = -1.$$

Hiermit lässt sich nun der Eigenwert zu e_v berechnen:

$$\begin{aligned}
 \sum_{u \in \Omega} \chi_v(u) &= \sum_{\substack{u \in \Omega \\ u^t v = 0}} \chi_v(u) + \sum_{\substack{u \in \Omega \\ u^t v \neq 0}} \chi_v(u) \\
 &= \sum_{\substack{u \in \Omega \\ u^t v = 0}} \chi(v^t u) + \sum_{\substack{u \in \Omega \\ u^t v = 1}} \sum_{\alpha \in \text{GF}(q)^*} \chi_v(\alpha u) \\
 &= \sum_{\substack{u \in \Omega \\ u^t v = 0}} \chi(0) + \sum_{\substack{u \in \Omega \\ u^t v = 1}} \sum_{\alpha \in \text{GF}(q)^*} \chi(\alpha) \\
 &= \sum_{\substack{u \in \Omega \\ u^t v = 0}} 1 - \sum_{\substack{u \in \Omega \\ u^t v = 1}} 1 \\
 &= (q-1)(m-w_v) - w_v.
 \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Vektoren e_v eine Basis bilden. Nun gilt

$$\begin{aligned}
 e_v^t e_w &= \sum_{i=1}^N \chi(v^t v_i) \chi(w^t v_i) = \sum_{i=1}^N \chi((v+w)^t v_i) \\
 &= \begin{cases} N, & \text{falls } v+w=0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Damit bilden die e_v eine Orthogonalbasis. □

Dies führt zu dem folgenden Satz, der im Wesentlichen schon von Delsarte in [11] bewiesen wurde.

Satz 4.1.6. *Sei $M = \{\langle y_i \rangle \mid i = 1, \dots, m\}$ eine nicht leere Punktmenge des $PG(n, q)$ und sei $\Omega = \{v \in V \setminus \{0\} \mid \langle v \rangle \in M\}$. Ist $\langle M \rangle = PG(n, q)$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. Ω ist eine $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ -Differenzmenge.
2. $G(\Omega)$ ist stark regulär.
3. M ist eine projektive $(m, n+1, m-w_1, m-w_2)$ Menge für bestimmte w_1 und w_2 .

Beweis. Wie bereits gezeigt, sind (1) und (2) nach Definition äquivalent. Es bleibt die Äquivalenz von (2) und (3) zu zeigen. Ist der Graph $G(\Omega)$ stark regulär, so hat

er drei Eigenwerte. Nach Lemma 4.1.5 haben diese die Form $(q-1)(m-w_v) - w_v$, wobei $v = 0$ ein Eigenvektor ist. Da 0^\perp keine Hyperebene ist, gibt es somit genau zwei Schnitzzahlen mit Hyperebenen und M ist somit eine projektive Menge.

Ist nun umgekehrt M eine projektive Menge, so hat A drei verschiedene Eigenwerte e^- , e^+ und $(q-1)m$, da es für Hyperebenen in projektiven Mengen nur zwei Schnitzzahlen gibt. Dabei ist 1 die Vielfachheit des Eigenwerts $m(q-1)$, da nur Vielfache von $e_0 = j$ Eigenvektoren zu diesem Eigenwert sind. Also gilt

$$(A - e^-E)(A - e^+E) = \alpha J$$

und damit gilt

$$A^2 = (e^- + e^+)A + e^-e^+E + m(q-1)J.$$

Somit ist A die Adjazenzmatrix eines stark regulären Graphen. □

Durch 4.1.5 ist klar, dass eine projektive Menge mit den Schnitzzahlen $(m-w_1)$ und $(m-w_2)$ somit die Eigenwerte $m(q-1)$ sowie

$$e^+ := (q-1)(m-w_1) - w_1 = (q-1)m - qw_1$$

und

$$e^- := (q-1)m - qw_2$$

mit $w_1 < w_2$ hat. Für stark reguläre Graphen gilt die Gleichung

$$A^2 = (\lambda - \mu)A + (\mu - k)I + \mu J = (e^+ + e^-)A + e^-e^+I + \mu J. \quad (4.1.7)$$

Da e^- , e^+ und k bekannt sind, kann man μ und λ ablesen.

Korollar 4.1.8. *Eine stark regulärer Graph gemäß Satz 4.1.6 mit den Parametern (N, k, λ, μ) hat die folgenden Parameter:*

$$\begin{aligned} N &= q^{n+1} \\ k &= m(q-1) \\ \lambda &= k^2 + 3k - (k+1)q(e^- + e^+) + q^2e^-e^+ \\ \mu &= k^2 + k - kq(e^- + e^+) + q^2e^-e^+ = \frac{q^2w_1w_2}{q^{n+1}} \end{aligned}$$

Man kann eine projektive Menge auch direkter im Sinne einer Differenzmenge beschreiben.

Korollar 4.1.9. *Die Punktmenge M aus Satz 4.1.6 ist genau dann eine projektive Menge, wenn es Konstanten E und E' gibt, so dass*

1. $P \notin M$ mit genau E Paaren $(Q, R) \in M \times M$
2. $P \in M$ mit genau E' Paaren $(Q, R) \in M \times M$

kollinear ist. Ist M eine projektive Menge, so gilt $\mu = 2E$ und $\lambda = 2E' + q - 2$.

Beweis. Sind drei Punkte $\langle v \rangle$, $\langle x \rangle$ und $\langle y \rangle$ kollinear, so gibt es eindeutig bestimmte $\alpha, \beta \in \text{GF}(q)$ mit $\alpha x + \beta y = v$. Gibt es nun E bzw. E' solcher Paare $(\langle x \rangle, \langle y \rangle)$, heißt dies, dass es sich um eine $\{E'(q-1), E(q-1)\}$ -Differenzmenge und damit einen stark regulären Graphen handelt. Andererseits existieren E und E' auch nur dann, wenn M eine projektive Menge ist.

Nun ist bei $\langle v \rangle \in M$ der Vektor v noch mit $q-2$ weiteren Vektoren aus $\langle v \rangle$ kollinear. Damit folgt

$$\begin{aligned}\mu &= 2E \\ \lambda &= 2E' + q - 2.\end{aligned}$$

□

4.2 Existenzaussagen für m -Ovoide

In [3] wird festgestellt, dass die m -Ovoide bestimmter Polarräume immer projektive Mengen sind und sich dadurch zusammen mit den vorgestellten Ergebnissen aus [8] Aussagen über die Existenz von m -Ovoiden treffen lassen.

Lemma 4.2.1. *Sei \mathbb{P} einer der Polarräume $H(2r, q^2)$ oder $Q^-(2r+1, q)$, P ein Punkt aus dem zugehörigen projektiven Raum \mathcal{P} und \mathcal{O} ein m -Ovoid von \mathbb{P} mit $\langle \mathcal{O} \rangle = \mathcal{P}$. Dann ist*

$$|P^\perp \cap \mathcal{O}| = -m\vartheta_{r-1}.$$

Beweis. Wegen $P \notin \mathbb{P}$ ist P^\perp eine nicht-ausgeartete Hyperebene. Nach 3.2.1 handelt es sich hierbei um ein ϑ_{r-1} -Tight Set und trifft damit \mathcal{O} in genau $m\vartheta_{r-1}$ Punkten. \square

Satz 4.2.2. *Sei \mathbb{P} einer der Polarräume $H(2r, q^2)$, $Q^-(2r+1, q)$ oder $W(2r-1, q)$ und \mathcal{O} ein m -Ovoid gemäß Lemma 4.2.1. Dann ist \mathcal{O} eine projektive Menge und definiert einen stark regulären Graphen mit den folgenden Parametern mit $\beta \in \{q, q^2\}$ als Größe des zu Grunde liegenden Körpers:*

$$\begin{aligned} N &= \beta^{n+1} \\ k &= m\vartheta_r(\beta - 1) \\ \lambda &= m(\beta - 1)(3 + m(\beta - 1)) - \sqrt{N} \\ \mu &= m(\beta - 1)(m(\beta - 1) + 1) \end{aligned}$$

Beweis. Nach 3.2.1 ist klar, dass ein Ovoid eines Polarraums zwei Schnitzzahlen h_1 und h_2 mit Hyperebenen hat, so dass es sich wegen $|\mathcal{O}| = m\vartheta_r$ um eine $[m\vartheta_r, n+1, h_1, h_2]$ -Projektive Menge handelt. Es bleibt, die Parameter des stark regulären Graphen mit Hilfe von 4.1.8 auszurechnen. Dies ergibt

$$\begin{aligned} N &= \beta^{n+1} \\ k &= m\vartheta_r(\beta - 1) \end{aligned}$$

und es lassen sich mit

$$h_1 = m\vartheta_{r-1} \text{ und } h_2 = m\vartheta_{r-1} - \vartheta_{r-1} + 1$$

die beiden weiteren Parameter λ und μ berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} w_1 w_2 &= (m\vartheta_r - m\vartheta_{r-1})(m\vartheta_r - m\vartheta_{r-1} + \beta^{\frac{n-1}{2}}) \\ &= m^2(\vartheta_r - \vartheta_{r-1})(m(\vartheta_r - \vartheta_{r-1}) + \beta^{\frac{n-1}{2}}) \\ &= m\beta^{n-1}(\beta - 1)(m(\beta - 1) + 1). \end{aligned}$$

Dies führt zu

$$\mu = \beta^{-n+1} w_1 w_2 = m(\beta - 1)(m(\beta - 1) + 1)$$

\mathbb{P}	$H(2r, q^2)$	$Q^-(2r+1, q)$	$W(2r-1, q)$
N	q^{4r+2}	q^{2r+2}	q^{2r}
k	$m(q^2-1)(q^{2r+1}+1)$	$m(q-1)(q^{r+1}+1)$	$m(q-1)(q^r+1)$
λ	$m(q^2-1)(3+m(q^2-1))-q^{2r+1}$	$m(q-1)(3+m(q-1))-q^{r+1}$	$m(q-1)(3+m(q-1))-q^r$
μ	$m(q^2-1)(m(q^2-1)+1)$	$m(q-1)(m(q-1)+1)$	$m(q-1)(m(q-1)+1)$

Abbildung 4.1: Die Parameter der gemäß Satz 4.2.2 zu Ovoiden gehörenden Graphen.

und

$$\lambda = \mu + e^- + e^+$$

zeigt mit

$$e^- + e^+ = 2m(\beta - 1) - \beta^{\frac{n+1}{2}}$$

die Gleichung

$$\lambda = m(\beta - 1)(m(\beta - 1) + 3) - \beta^{\frac{n+1}{2}}.$$

□

Für die drei verschiedenen Polarräume liefert der Satz die Werte in Tabelle 4.1. Genau das selbe Argument lässt sich auch für die x -Tight Sets der Polarräume $H(2r-1, q^2)$, $Q^+(2r-1, q)$, $W(2r-1, q)$ durchführen, da hier ein Punkt $Q \in \mathbb{P} \setminus \mathcal{T}$ die Quadrik in einem $x\theta_{r-2}^\beta$ -Ovoiden trifft, also $|Q^\perp \cap \mathcal{T}| = x\theta_{r-2}^\beta$ gilt.

Satz 4.2.3. *Sei \mathbb{P} einer der Polarräume $H(2r-1, q^2)$, $Q^+(2r-1, q)$ oder $W(2r-1, q)$ und \mathcal{T} ein x -Tight Set, das den ganzen projektiven Raum aufspannt. Dann ist \mathcal{T} eine projektive Menge und definiert einen stark regulären Graphen mit den folgenden Parametern mit $\beta \in \{q, q^2\}$ als Größe des zu Grunde liegenden Körpers:*

$$N = \beta^{n+1}$$

$$k = x(\beta^r - 1)$$

$$\lambda = x(x - 3) + \beta^r$$

$$\mu = x(x - 1)$$

4.2. Existenzaussagen für m -Ovoide

\mathbb{P}	$H(2r-1, q^2)$	$Q^+(2r-1, q)$	$W(2r-1, q)$
N	q^{4r}	q^{2r}	q^{2r}
k	$x(q^{2r}-1)$	$x(q^r-1)$	$x(q^r-1)$
λ	$x(x-3)+q^{2r}$	$x(x-3)+q^r$	$x(x-3)+q^r$
μ	$x(x-1)$	$x(x-1)$	$x(x-1)$

Abbildung 4.2: Die Parameter der gemäß Satz 4.2.3 zu Tight Sets gehörenden Graphen.

Beweis. Der Beweis funktioniert analog zu 4.2.2: Es handelt sich um eine $[x\theta_{r-1}^\beta, n+1, x\theta_{r-2}^\beta, \beta^{r-1} + x\theta_{r-2}^\beta]$ -Projektive Menge. Bekannt ist

$$N = \beta^{n+1}$$

$$k = x\theta_{r-1}^\beta(\beta - 1) = x(\beta^r - 1).$$

Mit Hilfe von h_1 und h_2 lässt w_1w_2 berechnen:

$$w_1w_2 = x(\theta_{r-1}^\beta - \theta_{r-2}^\beta)[x(\theta_{r-1}^\beta - \theta_{r-2}^\beta) - \beta^{r-1}]$$

$$= x(x-1)\beta^{2r-2}.$$

Dies liefert

$$\mu = x(x-1)\beta^{2r-2}\beta^2/\beta^{n+1} = x(x-1).$$

Als Eigenwerte ergeben sich

$$e^- + e^+ = -2x + \beta^r.$$

Mit $\lambda = \mu + e^- + e^+$ folgt

$$\lambda = x(x-1) - 2x + \beta^r = x(x-3) + \beta^r.$$

□

Der Satz liefert die Tabelle 4.2.

Alle Parameter eines stark regulären Graphen müssen nicht-negativ sein. Für m -Ovoide und λ liefert Satz 4.2.2 einige Nichtexistenzaussagen. Hierfür ist zu zeigen, um den Satz anwenden zu können, dass jeder Ovoid dieses Polarraum den gesamten projektiven Raum aufspannt.

Korollar 4.2.4. Sei \mathbb{P} einer der Polarräume $H(2r, q^2)$, $Q^-(2r+1, q)$ oder $W(2r-1, q)$ und \mathcal{O} ein m -Ovoid von \mathbb{P} . Dann gilt

$$m \geq \left(-3 + \sqrt{9 + 4\sqrt{N}} \right) / (2\beta - 2).$$

Beweis. Angenommen \mathcal{O} liegt in einer Hyperebene. Ist diese Hyperebene ausgeartet, trifft sie \mathcal{O} in $m\vartheta_{r-1} - \vartheta_{r-1} + 1 < |\mathcal{O}|$ oder $m\vartheta_{r-1} < |\mathcal{O}|$ Punkten. Widerspruch. Ist diese Hyperebene nicht-augeartet und trifft \mathcal{O} in mx Punkten mit $x = \beta^{\frac{r-1}{2}} + 1$ und $mx = |\mathcal{O}| = m\vartheta_r$. Wegen $\beta^{\frac{r-1}{2}} + 1 \neq \vartheta_r$ ist dies ein Widerspruch. Also liegt \mathcal{O} in keiner Hyperebene.

Satz 4.2.2 liefert

$$0 \leq \lambda = m(\beta - 1)(3 + m(\beta - 1)) - \sqrt{N} = (\beta - 1)^2 m^2 + 3(\beta - 1)m - \sqrt{N}.$$

Es folgt für $m \geq 0$

$$\begin{aligned} m &\geq -\frac{3}{2\beta - 2} + \sqrt{\frac{9}{4(\beta - 1)^2} + \frac{4\sqrt{N}}{4(\beta - 1)^2}} \\ &\geq (-3 + \sqrt{9 + 4\sqrt{N}}) / (2\beta - 2). \end{aligned}$$

□

Für $Q^-(2r + 1, q)$ mit $r > 1$ als auch für $W(2r - 1, q)$ mit $r > 2$ gilt $N^{\frac{1}{2}} \geq \beta^3$. Es folgt

$$\sqrt{9 + 4\beta\sqrt{N}} \geq 3\beta\sqrt{\beta^{-2} + \frac{4}{9}\beta} \geq 3\beta.$$

Damit folgt

$$m > (3\beta - 3) / (2\beta - 2) = 3/2.$$

Also $m > 1$. Für $H(2r, q^2)$ mit $r > 1$ folgt $N^{\frac{1}{4}} \geq \beta^{5/4}$. Für $\beta = 4$ sieht man leicht $m > 1$. Ist $\beta \geq 9$, folgt

$$\sqrt{9 + 4\beta\sqrt{N}} \geq 3\beta\sqrt{\beta^{-2} + \frac{4}{9}\beta^{1/2}} \geq 3\beta.$$

Damit wieder $m > 1$. Damit ist die Nichtexistenz von Ovoiden für diese Polarräume bewiesen. Thas zeigte dies schon mit einer anderen Methode in [28].

Korollar 4.2.5. *Sei $r > 1$.*

1. $H(2r, q^2)$ und $Q^-(2r + 1, q)$ besitzen keinen Ovoid.
2. $W(2r - 1, q)$ besitzt für $r > 2$ keinen Ovoid.

Korollar 4.2.6. *Die folgenden Polarräume besitzen keine 2-Ovoide:*

1. $W(2r - 1, q)$ für $r > 2$ oder q ungerade.
2. $Q^-(2r + 1, q)$ für $r > 2$.
3. $H(2r, q^2)$ für $r > 2$.
4. $Q(2r, q)$ für $r > 4$.
5. $Q(8, q)$ für $q > 3$ prim.

Beweis. Sei \mathcal{O} ein 2-Ovoid eines Polarraums \mathbb{P} . Auf jeder Geraden von \mathbb{P} liegen maximal zwei Punkte von \mathcal{O} . Insbesondere liegt auf den Geraden durch P maximal ein weiterer Punkt. Damit lässt sich die Menge der Punkte von $\mathcal{O} \setminus \{P\}$, die kollinear mit P ist, auf einen Ovoiden von $\mathbb{P}' := P^\perp/P$ projizieren. Der Polarraum \mathbb{P}' hat den selben Typ wie \mathbb{P} und einen um eins kleineren Rang. Dies liefert das Ergebnis für die einzelnen Polarräume, da in der Quotientengeometrie jeweils kein Ovoid existiert (siehe [23], Kapitel 3, Satz 2.2, für 1 im Fall $r = 2$ und q ungerade und [1] für 5.). \square

Das Argument lässt sich auf jeden Polarraum verallgemeinern, sofern man zeigen kann, dass eine Quotientengeometrie des Polarraums keinen Ovoid besitzt. Für Tight Sets liefert die vorgestellte Methode keine Nichtexistenzaussagen.

4.3 Kleine Tight Sets in $Q^+(5, q)$

Metsch zeigt in [24], dass x -Tight Sets für $x \leq q$ im $Q^+(5, q)$ immer eine Vereinigung disjunkter Ebenen sind, d.h. $x \leq 2$, da es nur zwei disjunkte Ebenen gibt. Von Metsch und Beukemann wird dieses Resultat in [5] auf $Q^+(2r - 1, q)$ in einer etwas schwächeren Form verallgemeinert. Für gewichtete Intriguing Sets

ist die äquivalente Aussage trivial, da die Erzeuger von $Q^+(2r - 1, q)$ den ganzen Eigenraum zum Eigenwert e^+ aufspannen. Interessant bleibt die Frage, wenn man nur Punkte mit nicht-negativen Gewicht zulässt. Entsprechend haben alle gewichteten Punktmenge im Folgenden nur nicht-negatives Gewicht.

Bezeichne das Gewicht eines Punktes P mit w_P . Sei im Folgenden w_{\min} das kleinste Gewicht eines Punktes einer gewichteten Punktmenge \mathcal{T} ungleich 0, also

$$w_{\min} := \min\{w_P \mid P \in \mathcal{T}, w_P > 0\}.$$

In diesem Abschnitt stellt sich das syntaktische Problem, dass im Kontext von u.a. blockierenden Mengen das Gewicht der einzelnen Punkte keine Rolle spielt, im Kontext von Tight Sets das Gewicht der Punkte hingegen immer eine Rolle spielt. Um Verwirrung zu vermeiden, wird im Folgenden im gewichteten Fall immer die Gewichtsfunktion w_P zusammen mit den Wörtern „Summe“ oder „Differenz“, im ungewichteten Fall die Menge \mathcal{T} zusammen mit den Wörtern „Vereinigung“ oder „Schnitt“ genutzt. Betrachtet man nur ungewichtete Tight Sets, fallen selbstverständlich beide Konzepte zusammen.

Lemma 4.3.1. *Für eine Gerade ℓ aus $PG(5, q)$ und ein gewichtetes x -Tight Set gilt*

$$\sum_{R \in \ell^\perp} w_R = q \left(\sum_{R \in \ell} w_R \right) + x.$$

Beweis. Zähle Paare (P, Q) mit $P \in \ell$, $Q \in \mathcal{T}$ und P, Q kollinear. Es sei w_X das Gewicht eines Punktes X . Jeder Punkt $P \in \ell \cap \mathcal{T}$ ist mit $w_P q^2 + x(q + 1)$ Punkten aus \mathcal{T} kollinear, jeder Punkt $P \in \ell \setminus \mathcal{T}$ ist mit $x(q + 1)$ Punkten aus \mathcal{T} kollinear. Andererseits ist $Q \in \ell^\perp$ mit $q + 1$ Punkten aus ℓ kollinear und $Q \notin \ell^\perp$ mit genau einem Punkt von ℓ kollinear. Es folgt

$$|\ell|(q + 1)x + \left(\sum_{R \in \ell} w_R \right) q^2 = \sum_{R \in \mathcal{T}} w_R + \left(\sum_{R \in \ell^\perp} w_R \right) q.$$

Mit $\sum_{R \in \mathcal{T}} w_R = x(q^2 + q + 1)$ und $|\ell| = q + 1$ folgt die Behauptung. \square

Wie im ungewichteten Fall benutzt man das folgende Resultat aus [17] und [18]:

Lemma 4.3.2. *Sei $PG(4, q)$ eine Quadrik, die aus einer Spitze P über $Q^-(3, q)$ besteht. Betrachte eine Punktmenge B mit $|B| \leq 2q$ der Quadrik. Wenn B ein blockierende Menge bzgl. Solids in $PG(4, q)$ ist, dann tritt einer der folgenden beiden Fälle auf:*

(a) *Eine Gerade der Quadrik ist in B enthalten.*

(b) *Es gilt $|B| > \frac{9}{5}q + 1$, $P \in B$, und es existiert eine eindeutige Gerade ℓ der Quadrik, die B in mindestens $2 + \frac{1}{2}(3q - |B|)$ Punkten trifft. Diese Gerade hat maximal $|B| - 1 - q$ Punkte in B .*

Das Lemma gilt insbesondere für den Spezialfall, dass $B \subseteq PG(2, q)$ für eine Quadrik $Q(2, q)$ gilt.

Um Lemma 4.3.2 anwenden zu können, muss man zeigen, dass x -Tight Sets entsprechende blockierende Mengen induzieren. Betrachte hierzu im Folgenden ein x -Tight Set der Quadrik $Q(4, q)$, so dass zu jeder Quadrik $Q^+(3, q)$ ein $c \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $Q^+(3, q)$ das Tight Set \mathcal{T} in $cq + x$ Punkten trifft.

Lemma 4.3.3. *Jede Ebene von π von P^\perp trifft \mathcal{T} gewichtet in mindestens w_P Punkten. Insbesondere ist \mathcal{T} eine blockierende Menge bzgl. Ebenen.*

Beweis. Für jeden Punkt P gilt $\sum_{Q \in P^\perp} w_Q = w_P q + x \geq x$, also trifft jeder Solid \mathcal{T} in mindestens x Punkten.

Im Schnitt $P^\perp \cap \mathcal{T}$ liegen gewichtet mindestens $qw_{\min} + x$ Punkte. Betrachte eine Ebene π in P^\perp . Durch π gehen q Solids S mit $S \neq P^\perp$. Also folgt

$$\begin{aligned} x(q+1) &= \sum_{Q \in \mathcal{T}} w_Q \\ &= \left(\sum_{Q \in P^\perp} w_Q \right) + \left(\sum_{\substack{S \supset \pi \\ S \text{ Solid}}} \sum_{Q \in S \setminus \pi} w_Q \right) \\ &\geq qw_P + x + \sum_{\substack{S \supset \pi \\ S \text{ Solid}}} \left(x - \sum_{Q \in \pi} w_Q \right) \\ &= qw_P + x + q \left(x - \sum_{Q \in \pi} w_Q \right). \end{aligned}$$

Dies vereinfacht sich zu

$$\sum_{Q \in \pi} w_Q \geq w_P.$$

Also trifft π die Menge $P^\perp \cap \mathcal{T}$ gewichtet in mindestens w_P Punkten. \square

Lemma 4.3.4. *Sei $Q(4, q) \subset PG(4, q)$ und \mathcal{T} ein x -Tight Set von $Q(4, q)$, so dass zu jeder Quadrik $Q^+(3, q)$ ein $c \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $Q^+(3, q)$ das Tight Set \mathcal{T} in $cq + x$ Punkten trifft. Gilt eine der Bedingungen*

1. $x \leq \frac{4}{5}q + 1$ oder
2. $x \leq q$ und für jedes zu einer Quadrik $Q^+(3, q)$ gehörende c gilt: $c \in \{0, 1, 2\}$,

so ist \mathcal{T} die Summe von x Geraden. Einen Punkt P treffen hierbei genau w_P solche Geraden.

Beweis. Es reicht jeweils zu zeigen, dass eine Gerade ℓ für $x \geq 1$ in \mathcal{T} liegt. Dann ist auch $\mathcal{T} \setminus \ell$ ein $x - 1$ -Tight Set, dass die Bedingungen erfüllt. Per Induktion folgt die Behauptung.

Sei nun $P \in \mathcal{T}$ mit $w_P = w_{\min}$. Zu zeigen ist, dass

1. $\mathcal{T} \cap P^\perp$ eine blockierende Menge bzgl. Ebenen von P^\perp ist und
2. für die ungewichtete Anzahl der Punkte von $|\mathcal{T} \cap P^\perp| \leq 2q$ gilt,

um Lemma 4.3.2 anwenden zu können.

Die 2. Bedingung ist klar, da nach Voraussetzung maximal $q + \frac{x}{w_P}$ Punkte in P^\perp liegen. Die 1. Bedingung folgt aus 4.3.3.

Ist $x \leq \frac{4}{5}q + 1$, so folgt $|\tilde{\mathcal{T}} \cap P^\perp| \leq \frac{9}{5}q + 1$ und damit liegt P auf einer Geraden.

Es bleibt der Fall mit $c \in \{0, 1, 2\}$ zu zeigen. Der Punkt P liegt hier nach 4.3.2 auf einer Geraden ℓ mit mindestens $2 + q - \frac{1}{2}x$ und maximal $x - 1$ Punkten. Betrachtet man einen Punkt $Q \in \mathcal{T} \setminus \ell$ mit $w_Q = \min_{R \in \mathcal{T} \setminus \ell} w_R$, so liegt Q auf einer Geraden ℓ' mit mindestens $1 + q - \frac{1}{2}x$ Punkten, falls $|Q^\perp \cap \ell| = 1$ gilt (ℓ' könnte ℓ treffen), und $2 + q - \frac{1}{2}x$ Punkten sonst. Wieder hat ℓ' maximal $x - 1$ Punkte.

Die Geraden ℓ und ℓ' liegen in einem Solid S , der $Q(4, q)$ in einem $Q^+(3, q)$ trifft. Aus $|\mathcal{T} \cap \ell|, |\mathcal{T} \cap \ell'| \leq x - 1 \leq q - 1$ folgt, dass ℓ bzw. ℓ' jeweils mindestens

zwei Punkte P, P' bzw. Q, Q' nicht aus \mathcal{T} enthalten. Sind ℓ und ℓ' disjunkt, so ist PQ oder PQ' eine Sekante s der Quadrik, da diese keine Dreiecke (bzw. eine Ebene der Quadrik maximal zwei Geraden) enthält. Treffen sich ℓ und ℓ' in einem Punkt R mit o.B.d.A. $R \neq P, Q$, so ist aus dem selben Grund PQ eine Sekante s der Quadrik.

Es gilt $|S \cap \mathcal{T}| = cq + x$ für ein $c \in \{0, 1, 2\}$. Ist π eine Ebene von S , dann enthalten die anderen Solids durch π wegen

$$x(q+1) = \sum_{R \in \mathcal{T}} w_R = cq + x + \sum_{\substack{H \supset \pi \\ S \neq H \text{ Solid}}} \sum_{R \in H \setminus \pi} w_R$$

im Durchschnitt gewichtet $(\sum_{R \in \pi} w_R) + x - c$ Punkte in \mathcal{T} . D.h. $\sum_{R \in \pi} w_R \geq c$.

Es gibt, falls sich ℓ und ℓ' treffen bzw. nicht treffen, in $Q^+(3, q)$ entweder q bzw. $q-1$ Ebenen durch s , die ℓ und ℓ' nicht enthalten und mindestens c Punkte enthalten. Es folgt

$$\sum_{R \in \ell \cup \ell'} w_R \leq \sum_{R \in S} w_R - qc \leq x$$

bzw.

$$\sum_{R \in \ell \cup \ell'} w_R \leq \sum_{R \in S} w_R - (q-1)c \leq x + c \leq x + 2.$$

Der ungewichtete Schnitt $S \cap \mathcal{T}$ enthält aber mindestens die $2 + 2q - x$ bzw. $3 + 2q - x$ Punkte von ℓ und ℓ' . Widerspruch zu $x \leq q$. \square

Satz 4.3.5. *Sei \mathcal{T} ein nicht-negativ gewichtetes x -Tight Set des $Q^+(5, q)$.*

1. *Gilt $x \leq q$ und \mathcal{T} ist ein ungewichtetes x -Tight Set, so ist \mathcal{T} die Vereinigung von disjunkten Ebenen. Insbesondere gilt $x \leq 2$.*
2. *Gilt $x \leq \frac{4}{5}q + 1$, so ist \mathcal{T} die Summe von Ebenen.*

Beweis. Für den ungewichteten Fall gilt für eine Sekante s der Kleinquadrik $c := |s \cap \mathcal{T}| \in \{0, 1, 2\}$, damit ist $|s^\perp \cap \mathcal{T}| = cq + x$ nach 4.3.1. Damit gilt $|Q^+(3, q) \cap \mathcal{T}| \in \{x, q+x, 2q+x\}$ für alle hyperbolischen Quadriken $Q^+(3, q)$.

Für jede Quadrik $Q(4, q) \subseteq Q^+(5, q)$ gilt nach 4.3.4, dass $Q(4, q) \cap \mathcal{T}$ die gewichtete Vereinigung von x Geraden ist. Wegen $x \leq q$ enthält $Q(4, q)$ keine weiteren Geraden.

Betrachte einen Punkt P mit minimalem Gewicht. Jede Quadrik $Q(4, q)$ durch P schneidet \mathcal{T} so in einer Summe von Geraden, dass P durch genau w_P solcher Geraden getroffen wird. Da w_P minimal ist, hat aber jeder dieser Geraden nur Punkte mit Gewicht mindestens w_P . Der Punkt P wird also in $Q(4, q)$ von der w_P -fachen Summe einer einzigen Geraden ℓ getroffen.

Zwei solcher Geraden ℓ und ℓ' zu zwei verschiedenen parabolischen Quadriken $Q(4, q)$ müssen koplanar sein: ansonsten liegen ℓ und ℓ' gemeinsam in einer Quadrik $Q(4, q)$. Widerspruch zu 4.3.4. Also liegen alle solche Geraden durch einen Punkt P in einer Ebene E . Entsprechend haben alle Punkte dieser Ebene mindestens Gewicht w_P . Nun kann man E mit Gewicht w_P entfernen und es folgt per Induktion, dass \mathcal{T} die Summe von Ebenen ist.

Im ungewichteten Fall müssen die Ebenen disjunkt sein. In $Q^+(5, q)$ gibt es keine drei paarweise disjunkten Ebenen. Es folgt $x \leq 2$. \square

Aus Abschnitt 3.6 ist bekannt, dass es ein gewichtetes $q + \sqrt{q}$ -Tight Set gibt, dass keine Summe von Ebenen ist. Somit bleibt die Frage, ob es für

$$x \in \left(\frac{4}{5}q + 1, q + \sqrt{q} \right)$$

ein x -Tight Set gibt, dass nicht die Summe von Erzeugern ist. Im kleinsten weiteren ungewichteten Fall haben alle bekannten allgemeinen Beispiele ein x mit $x \approx \alpha q^2$ für ein $\alpha > 0$ und große q .

A Auflistung neuer Inhalte

Dieser Abschnitt listet Teile der Arbeit auf, die inhaltlich (und nicht von der Form her) neu sind. Die Liste soll übersichtlich zeigen, welche Teile der Arbeit in ihrer Allgemeinheit inhaltlich neu sind und hier nicht nur in einer anderen (meist ausführlicheren) Darstellung vorliegen. Der Zweck des Abschnittes ist, den Gutachtern der Arbeit zentral einen Überblick über hervorzuhebende eigenständige Anteile in der Arbeit zu geben.

Kapitel 1 Hier werden nur bekannte Tatsachen vorgestellt. Die Motivation von Intriguing Sets durch Cliques und Cocliques stammt von Einfeld, wurde hier aber ausführlicher aufgeschrieben.

Kapitel 2

Teil	Eigenanteil
Satz 2.1.1	Der Satz verallgemeinert Theorem 2.1 aus [13] von $\text{Bild}(f) \subseteq \{0, 1\}$ nach $\text{Bild}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Eisfelds Spezialfall findet sich in 2.1.2. Die Beweisidee ist identisch zu Eisfeld.
Abschnitt 2.2	Diese allgemeine Definition von Intriguing Sets gewichtet auf stark regulären Graphen ist neu. Bei Eisfeld findet sich nur der ungewichtete Fall. Bei Bamberg ist die gewichtete Definition auf verallgemeinerte Vierecke, die ungewichtete auf Polarräume beschränkt. Entsprechend sind auch die resultierenden Aussagen wie 2.2.5, das sich spezieller nur bei Bamberg findet, allgemeiner.
Korollar 2.2.6	Das Beispiel ist eine Verallgemeinerung eines Beispiels für einen gewichteten 1-Ovoid für verallgemeinerte Vierecke.
Lemma 2.2.7	Die Aussage ist neu.
Abschnitt 2.3	Alles, was für stark reguläre Graphen neu war, ist auch für den Spezialfall der Polarräume neu, d.h. vor allem 2.3.4 und der Beweis zu 2.3.5.

Kapitel 3

Teil	Eigenanteil
Lemma 3.1.1	Ungewichtet Bamberg, gewichtet neu (aber genauso langweilig).
Lemma 3.1.2 f.	Diese Form ist neu. Auf Tight Sets beschränkt findet sich diese Aussage bei Eisfeld über partielle Geometrien. Auf verallgemeinerte Vierecke beschränkt findet sich die Aussage bei Bamberg. Das folgende Korollar verallgemeinert Bamberg.
Definition 3.1.6	Neu, verallgemeinert Irreduzibilität basierend auf Bambergs Begriff.
Korollar 3.1.7	Gewichtet ist die Aussage neu, ungewichtet bekannt.
Abschnitt 3.2	Alle Aussagen des Abschnitts sind bekannt, Bamberg ist aber bei seiner Auflistung in [3] gerade bzgl. 3.2.2 und 3.2.3 sowohl unvollständig als auch knapp.
Lemma 3.2.5	Kelly ist bei der Auflistung seiner Bedingungen an s unvollständig.
Lemma 3.2.6	Nicht neu, aber der Beweis wurde geometrischer aufgeschrieben.
Abschnitt 3.3	Die Beweise sind im Allgemeinen wie bei Bamberg, nur ausführlicher. Eine Ausnahme ist 3.3.5, das Bamberg unverständlich knapp und anders beweist (s. dortige Fußnote).
Abschnitt 3.4	Die Quellen für die möglichen Körperreduktionen sind ein Buch ([16]) mit 200 Seiten ohne eine genauere Angabe und [14]. Die Resultate von [14] werden bei Kelly im Gegensatz zu dieser Arbeit nicht korrekt wiedergegeben, weswegen im Fall q gerade hermitesche Polarräume keine Intriguing Sets von hyperbolischen und elliptischen Quadriken induzieren. Einer beider Beweise zu $Q(0, q^2)$ wurde aus [14] übernommen.

Teil	Eigenanteil
Abschnitt 3.5	Dem Autor fiel auf, dass man die genannten Sätze als Spezialfälle der bekannten Körperreduktionen erhält. Der Autor unterließ dazu weitere Quellenstudien, ist aber mit dieser Entdeckung sicher nicht der erste.
Abschnitt 3.6	Komplett neu mit Linda Beukemann. Linda Beukemann stellte fest, dass sich Erzeuger, die G in einem Unterraum mit Dimension größer $\dim(G)/2$, all ihre Schnittpunkt in G gemeinsam haben und konstruierte das ungewichtete Hyperbenenbeispiel. Vom Autor stammen das Faserungsbeispiel und die durch 4.3 motivierten gewichteten Beispiele.

Kapitel 4

Teil	Eigenanteil
Abschnitte 4.1 und 4.2	Keine neue Mathematik.
Abschnitt 4.3	Sämtliche Aussagen sind, sofern sie gewichtet oder nicht-negativ gewichtet sind, neu.

Literaturverzeichnis

- [1] BALL, Simeon ; GOVAERTS, Patrick ; STORME, Leo: On ovoids of parabolic quadrics. In: Des. Codes Cryptogr. 38 (2006), Nr. 1, 131–145. <http://dx.doi.org/10.1007/s10623-005-5666-0>. – DOI 10.1007/s10623-005-5666-0. – ISSN 0925-1022
- [2] BAMBERG, John ; DEVILLERS, Alice ; SCHILLEWAERT, Jeroen: Weighted intriguing sets of finite generalised quadrangles. . – Submitted to JACO.
- [3] BAMBERG, John ; KELLY, Shane ; LAW, Maska ; PENTTILA, Tim: Tight sets and m -ovoids of finite polar spaces. In: J. Combin. Theory Ser. A 114 (2007), Nr. 7, 1293–1314. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcta.2007.01.009>. – DOI 10.1016/j.jcta.2007.01.009. – ISSN 0097-3165
- [4] BAMBERG, John ; LAW, Maska ; PENTTILA, Tim: Tight sets and m -ovoids of generalised quadrangles. In: Combinatorica 29 (2009), Nr. 1, 1–17. <http://dx.doi.org/10.1007/s00493-009-2179-x>. – DOI 10.1007/s00493-009-2179-x. – ISSN 0209-9683
- [5] BEUKEMANN, Linda ; METSCH, Klaus: Small tight sets of hyperbolic quadrics. – Preprint
- [6] BROUWER, A. E. ; LINT, J. H.: Strongly regular graphs and partial geometries. In: Enumeration and design (Waterloo, Ont., 1982). Toronto, ON : Academic Press, 1984, S. 85–122
- [7] BRUEN, A. A. ; DRUDGE, Keldon: The construction of Cameron-Liebler line classes in $PG(3, q)$. In: Finite Fields Appl. 5 (1999), Nr. 1, 35–45. <http://dx.doi.org/10.1006/ffta.1998.0239>. – DOI 10.1006/ffta.1998.0239. – ISSN 1071-5797
- [8] CALDERBANK, R. ; KANTOR, W. M.: The geometry of two-weight codes. In: Bull. London Math. Soc. 18 (1986), Nr. 2, 97–122. <http://dx.doi.org/10.1112/blms/18.2.97>. – DOI 10.1112/blms/18.2.97. – ISSN 0024-6093
- [9] CAMERON, P.J. ; LINT, J.H.: Designs, graphs, codes and their links. Cambridge University Press, 1991 (London Mathematical Society student texts). <http://books.google.com/books?id=j1CZeuHI7q0C>. – ISBN 9780521413251
- [10] DE WISPELAERE, An: Ovoids and spreads of finite classical generalized hexagons and applications. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2005. – 222 S. http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqdiss&rft_dat=xri:pqdiss:C826080. – Thesis (Ph.D.)–Universiteit Gent (Belgium)

-
- [11] DELSARTE, Ph.: Weights of linear codes and strongly regular normed spaces. In: Discrete Mathematics 3 (1972), Nr. 1-3, 47 - 64. [http://dx.doi.org/DOI:10.1016/0012-365X\(72\)90024-6](http://dx.doi.org/DOI:10.1016/0012-365X(72)90024-6). – DOI DOI: 10.1016/0012-365X(72)90024-6. – ISSN 0012-365X
- [12] DRUDGE, Keldon W.: Extremal sets in projective and polar spaces. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1998. – 111 S. http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqdiss&rft_dat=xri:pqdiss:NQ31135. – ISBN 978-0612-31135-0. – Thesis (Ph.D.)–The University of Western Ontario (Canada)
- [13] EISFELD, Jörg: On the common nature of spreads and pencils in $PG(d, q)$. In: Discrete Math. 189 (1998), Nr. 1-3, 95–104. [http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X\(98\)00004-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X(98)00004-1). – DOI 10.1016/S0012-365X(98)00004-1. – ISSN 0012-365X
- [14] GILL, Nick: Polar spaces and embeddings of classical groups. In: New Zealand J. Math. 36 (2007), S. 175–184. – ISSN 1171-6096
- [15] KELLY, Shane: Constructions of intriguing sets of polar spaces from field reduction and derivation. In: Des. Codes Cryptogr. 43 (2007), Nr. 1, 1–8. <http://dx.doi.org/10.1007/s10623-007-9046-9>. – DOI 10.1007/s10623-007-9046-9. – ISSN 0925-1022
- [16] KLEIDMAN, Peter ; LIEBECK, Martin: London Mathematical Society Lecture Note Series. Bd. 129: The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge : Cambridge University Press, 1990. – x+303 S. <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511629235>. <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511629235>. – ISBN 0-521-35949-X
- [17] KLEIN, Andreas ; METSCH, Klaus: New results on covers and partial spreads of polar spaces. In: Innov. Incidence Geom. 1 (2005), S. 19–34. – ISSN 1781-6475
- [18] KLEIN, Andreas ; METSCH, Klaus: Corrections to "New results on covers and partial spreads of polar spaces". In: Innov. Incidence Geom. 11 (2010), S. 237–240
- [19] LÉVAY, Péter ; SANIGA, Metod ; VRANA, Péter ; PRACNA, Petr: Black hole entropy and finite geometry. In: Phys. Rev. D 79 (2009), Nr. 8, S. 084036, 12. – ISSN 1550-7998
- [20] MATURO, Antonio: Cooperative Games, Finite Geometries and Hyperstructures. In: Ratio Mathematica 14 (2003), S. 57–70. – ISSN 1592-7415
- [21] METSCH, Klaus: Diskrete Mathematik 2. – Skript zur gleichnamigen Vorlesung an der JLU Gießen im WS 2008/2009.
- [22] METSCH, Klaus: Projektive Geometrie 1. – Skript zur gleichnamigen Vorlesung an der JLU Gießen im WS 2008/2009.

- [23] METSCH, Klaus: Projektive Geometrie 2. – Skript zur gleichnamigen Vorlesung an der JLU Gießen im WS 2009/2010.
- [24] METSCH, Klaus: The non-existence of Cameron-Liebler line classes with parameter $2 < x \leq q$. In: Bull. Lond. Math. Soc. 42 (2010), Nr. 6, 991–996. <http://dx.doi.org/10.1112/blms/bdq057>. – DOI 10.1112/blms/bdq057. – ISSN 0024–6093
- [25] NEUMAIER, A.: Regular cliques in graphs and special $1\frac{1}{2}$ -designs. In: Finite geometries and designs (Proc. Conf., Chelwood Gate, 1980) Bd. 49. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1981, S. 244–259
- [26] SHULT, E. E. ; THAS, J. A.: m -systems and partial m -systems of polar spaces. In: Des. Codes Cryptogr. 8 (1996), Nr. 1-2, 229–238. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00130581>. – DOI 10.1007/BF00130581. – ISSN 0925–1022. – Special issue dedicated to Hanfried Lenz
- [27] SZÓNYI, Tamás: Blocking Sets in Desarguesian Affine and Projective Planes. In: Finite Fields and Their Application 3 (1997), Nr. FF960176, S. 187–202
- [28] THAS, J. A.: Ovoids and spreads of finite classical polar spaces. In: Geom. Dedicata 10 (1981), Nr. 1-4, 135–143. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01447417>. – DOI 10.1007/BF01447417. – ISSN 0304–4637
- [29] THAS, J. A. ; PAYNE, S. E.: Spreads and ovoids in finite generalized quadrangles. In: Geom. Dedicata 52 (1994), Nr. 3, 227–253. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01278475>. – DOI 10.1007/BF01278475. – ISSN 0046–5755

B Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich gemäß §25(6) der Allgemeinen Bestimmungen für modularisierte Studiengänge an der JLU Gießen, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und alle von mir benutzten Quellen und Hilfsmittel in der Arbeit angegeben habe.

Ferdinand Ihringer