# Erdős-Ko-Rado Mengen in endlichen Polarräumen

Ferdinand Ihringer

Justus-Liebig-Universität Gießen

01.06.2013

# Erdős-Ko-Rado Mengen

## Definition

Sei $n \geq 2k$ und $X = \{1, \ldots, n\}$. Eine **Erdős-Ko-Rado Menge** (EKR Menge) von $X$ ist eine Menge $Y$ von $k$-elementigen Teilmengen ($k$-Menge) von $X$, s.d. die Elemente von $Y$ paarweise nicht disjunkt sind.

# Erdős-Ko-Rado Mengen

## Definition

Sei $n \geq 2k$ und $X = \{1, \ldots, n\}$. Eine **Erdős-Ko-Rado Menge** (EKR Menge) von $X$ ist eine Menge $Y$ von $k$-elementigen Teilmengen ($k$-Menge) von $X$, s.d. die Elemente von $Y$ paarweise nicht disjunkt sind.

## Beispiele

1. Alle $k$-Mengen, die 1 enthalten. Für $n = 4$, $k = 2$:
$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}.$$
2. $n = 2k$: Alle $k$-Mengen, die nicht $n$ enthalten. Für $n = 4$, $k = 2$:
$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}.$$

# Erdős-Ko-Rado Mengen

**Satz (Erdős, Ko, Rado (1961))**

*Sei $n \geq 2k$. Betrachte $X = \{1, \ldots, n\}$. Sei $Y$ eine EKR Menge. Dann*

$$|Y| \leq \binom{n-1}{k-1}$$

# Erdős-Ko-Rado Mengen

### Satz (Erdős, Ko, Rado (1961))

*Sei $n \geq 2k$. Betrachte $X = \{1, \ldots, n\}$. Sei $Y$ eine EKR Menge. Dann*

$$|Y| \leq \binom{n-1}{k-1}$$

*mit Gleichheit genau dann, wenn*

### Beispiele

1. Alle $k$-Mengen, die 1 enthalten. Für $n = 4$, $k = 2$:

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}.$$

2. $n = 2k$: Alle $k$-Mengen, die nicht $n$ enthalten. Für $n = 4$, $k = 2$:

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}.$$

# Die zweitgrößten maximalen Beispiele

**Satz (Hilton, Milner (1967))**

*Die zweitgrößten maximalen EKR Mengen sind ...*

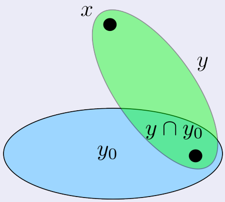
# Die zweitgrößten maximalen Beispiele

### Satz (Hilton, Milner (1967))

*Die zweitgrößten maximalen EKR Mengen sind ...*

1. *Sei $y_0$ eine $k$-Menge und $x \in X \setminus y_0$.*

$$Y = \{y_0\} \cup \{y \text{ } k\text{-Menge} \mid y \cap y_0 \neq \emptyset \text{ und } x \in y\}.$$



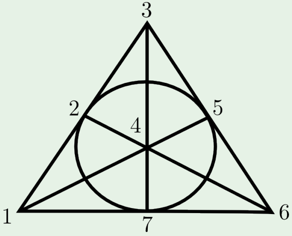

2. *Für $k = 3$: Die Menge aller 3-Mengen, die eine feste 3-Menge in mindestens 2 Elementen treffen.*

# Ein sehr kleines Beispiel

## Beispiel

Für $n \geq 7$, $k = 3$, dieses Beispiel ist maximal:

$$\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{1,6,7\},$$
$$\{2,4,6\},\{2,5,7\},\{3,4,7\},\{3,5,6\}.$$




Das ist die Fanoebene PG$(2,2)$. Es gibt keine Schnitte in 2-Mengen. Viele ähnliche Beispiele wurden durch Eisfeld (1999) untersucht.

# Eine Verallgemeinerung

**Definition (Erdős, Ko, Rado (1961))**

Sei $n \geq 2k$, $t \in \mathbf{N}$ und $X = \{1, \ldots, n\}$. Eine $(n, k, t)$-**Erdős-Ko-Rado Menge** (EKR Menge) von $X$ ist eine Menge $Y$ von $k$-Teilmengen of $X$ s.d. sich die Elemente von $Y$ paarweise in mindestens $t$ Elementen schneiden.

# Eine Verallgemeinerung

**Definition (Erdős, Ko, Rado (1961))**

Sei $n \geq 2k$, $t \in \mathbf{N}$ und $X = \{1, \ldots, n\}$. Eine $(n, k, t)$-**Erdős-Ko-Rado Menge** (EKR Menge) von $X$ ist eine Menge $Y$ von $k$-Teilmengen of $X$ s.d. sich die Elemente von $Y$ paarweise in mindestens $t$ Elementen schneiden.

**Beispiele**

1. Alle $k$-Mengen, die $\{1, \ldots, t\}$ enthalten. Für $n = 5$, $k = 3$, $t = 2$:
$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}.$$
2. $n + t - 1 = 2k$: Alle $k$-Mengen, die nicht $n$ enthalten.
Für $n = 5$, $k = 3$, $t = 2$:
$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}.$$

# Beispiele für $(n, k, t)$-EKR Mengen

**Beispiel**

Sei $r \in \mathbf{N}$. Dann ist die Menge aller $k$-Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$, die $\{1, \ldots, t + 2r\}$ in mindestens $t + r$ Elementen treffen eine $(n, k, t)$-EKR Menge.

# Beispiele für $(n, k, t)$-EKR Mengen

**Beispiel**

Sei $r \in \mathbf{N}$. Dann ist die Menge aller $k$-Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$, die $\{1, \ldots, t + 2r\}$ in mindestens $t + r$ Elementen treffen eine $(n, k, t)$-EKR Menge.

- Frankl (1978): Vermutung: Wenn $Y$ maximale Größe hat, dann ist es für ein $r$ obiges Beispiel.

# Beispiele für $(n, k, t)$-EKR Mengen

**Beispiel**

Sei $r \in \mathbf{N}$. Dann ist die Menge aller $k$-Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$, die $\{1, \ldots, t + 2r\}$ in mindestens $t + r$ Elementen treffen eine $(n, k, t)$-EKR Menge.

- Frankl (1978): Vermutung: Wenn $Y$ maximale Größe hat, dann ist es für ein $r$ obiges Beispiel.
- Frankl, Wilson (1986): Für ein $r$ hat obiges Beispiel maximale Größe.

# Beispiele für $(n, k, t)$-EKR Mengen

**Beispiel**

Sei $r \in \mathbf{N}$. Dann ist die Menge aller $k$-Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$, die $\{1, \ldots, t + 2r\}$ in mindestens $t + r$ Elementen treffen eine $(n, k, t)$-EKR Menge.

- Frankl (1978): Vermutung: Wenn $Y$ maximale Größe hat, dann ist es für ein $r$ obiges Beispiel.
- Frankl, Wilson (1986): Für ein $r$ hat obiges Beispiel maximale Größe.
- Ahlswede, Khachatrian (1997): Frankls Vermutung ist für alle $(n, k, t)$ wahr.

# Beispiele für $(n, k, t)$-EKR Mengen

**Beispiel**

Sei $r \in \mathbf{N}$. Dann ist die Menge aller $k$-Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$, die $\{1, \dots, t + 2r\}$ in mindestens $t + r$ Elementen treffen eine $(n, k, t)$-EKR Menge.

- Frankl (1978): Vermutung: Wenn $Y$ maximale Größe hat, dann ist es für ein $r$ obiges Beispiel.
- Frankl, Wilson (1986): Für ein $r$ hat obiges Beispiel maximale Größe.
- Ahlswede, Khachatrian (1997): Frankls Vermutung ist für alle $(n, k, t)$ wahr.
- Friedgut (2008): Stabilitätsresultate für $k(t + 1) < n$.

# Erdős-Ko-Rado Mengen projektiver Räume

**Definition**

Eine **Erdős-Ko-Rado Menge** $Y$ von $k$-dimensionalen Unterräumen ($k$-Raum) eines projektiven Raums $\mathrm{PG}(n, q)$ ist eine Menge von $k$-Unterräumen, welche paarweise nicht disjunkt sind.

# Erdős-Ko-Rado Mengen projektiver Räume

## Definition

Eine **Erdős-Ko-Rado Menge** $Y$ von $k$-dimensionalen Unterräumen ($k$-Raum) eines projektiven Raums $\mathrm{PG}(n, q)$ ist eine Menge von $k$-Unterräumen, welche paarweise nicht disjunkt sind.

## Beispiele

1. Für $n = 3, k = 1$ alle $q^2 + q + 1$ Geraden auf einem festen Punkt.
2. Für $n = 3, k = 1$ alle $q^2 + q + 1$ Geraden einer festen Ebene.

# Erdős-Ko-Rado Mengen projektiver Räume

**Satz (Hsieh (1975), Frankl und Wilson (1986), Godsil und Newman (2004))**

*Sei $n \geq 2k+1$. Sei $Y$ eine EKR Menge von $k$-Räumen von $PG(n, q)$. Dann gilt*

$$|Y| \leq \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

# Erdős-Ko-Rado Mengen projektiver Räume

**Satz (Hsieh (1975), Frankl und Wilson (1986), Godsil und Newman (2004))**

*Sei $n \geq 2k+1$. Sei $Y$ eine EKR Menge von $k$-Räumen von $PG(n,q)$. Dann gilt*

$$|Y| \leq \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

*mit Gleichheit genau dann, wenn*

1. *$Y$ ist die Menge aller $k$-Räume auf einem festen Punkt oder*
2. *$n = 2k+1$ und $Y$ ist die Menge aller $k$-Räume, die in einem festen $(n-1)$-Raum enthalten sind.*

# Einige Ergebnisse zu PG($n$, $q$)

1. Hsieh (1975): Beweis oberer Schranken und Klassifikation von Beispielen maximaler Größe für viele $n$, $k$ und $q$.

# Einige Ergebnisse zu PG($n$, $q$)

1. Hsieh (1975): Beweis oberer Schranken und Klassifikation von Beispielen maximaler Größe für viele $n$, $k$ und $q$.
2. Frankl, Wilson (1986): Beweis der korrekten oberen Schranke für alle $n \geq 2k + 1$. Klassifikation aller Beispiele maximaler Größe für $n > 2k + 1$.
3. Godsil, Newman (2004): Klassifikation aller Beispiele maximaler Größe für $n = 2k + 1$.

# Einige Ergebnisse zu PG($n, q$)

1. Hsieh (1975): Beweis oberer Schranken und Klassifikation von Beispielen maximaler Größe für viele $n$, $k$ und $q$.
2. Frankl, Wilson (1986): Beweis der korrekten oberen Schranke für alle $n \geq 2k + 1$. Klassifikation aller Beispiele maximaler Größe für $n > 2k + 1$.
3. Godsil, Newman (2004): Klassifikation aller Beispiele maximaler Größe für $n = 2k + 1$.
4. Blockhuis, Brouwer, Chowdhury, Frankl, Mussche, Patkós, Szőnyi (2010): Klassifikation aller zweitgrößten maximalen Beispiele.

# Erneut eine Verallgemeinerung

**Definition**

Eine $(n, k, t)$-**Erdős-Ko-Rado Menge** $Y$ eines $k$-dimensionalen Unterraums ($k$-Raum) eines projektiven Raums $\mathrm{PG}(n, q)$ ist eine Menge von $k$-Unterräumen, welche sich paarweise in mindestens Dimension $t$ schneiden.

# Erneut eine Verallgemeinerung

**Definition**

Eine $(n, k, t)$-**Erdős-Ko-Rado Menge** $Y$ eines $k$-dimensionalen Unterraums ($k$-Raum) eines projektiven Raums PG$(n, q)$ ist eine Menge von $k$-Unterräumen, welche sich paarweise in mindestens Dimension $t$ schneiden.

1. Frankl, Wilson (1986): Scharfe obere Schranke für alle $(n, k, t)$ mit Eigenwerttechnik. Klassifikation aller Beispiele maximaler Größe außer für $n = 2k + 1$.
2. Tanaka (2006): Klassifikation aller Beispiele maximaler Größe.

# Graphen

Man kann das Problem graphentheoretisch formulieren:

# Graphen

Man kann das Problem graphentheoretisch formulieren:

- Betrachte einen Graph $\Gamma$ mit $k$-Mengen/$k$-Unterräumen/usw. als Knoten.

# Graphen

Man kann das Problem graphentheoretisch formulieren:

- Betrachte einen Graph $\Gamma$ mit $k$-Mengen/$k$-Unterräumen/usw. als Knoten.
- Zwei Knoten $a, b$ sind adjazent, falls $|a \cap b| < t/\dim(a \cap b) < t$/usw.

# Graphen

Man kann das Problem graphentheoretisch formulieren:

- Betrachte einen Graph $\Gamma$ mit $k$-Mengen/$k$-Unterräumen/usw. als Knoten.
- Zwei Knoten $a, b$ sind adjazent, falls $|a \cap b| < t$/$\dim(a \cap b) < t$/usw.
- Die $(n, k, t)$-EKR Mengen $Y$ von $\Gamma$ sind genau die Cocliquen von $\Gamma$.

# Graphen

Man kann das Problem graphentheoretisch formulieren:

- Betrachte einen Graph $\Gamma$ mit $k$-Mengen/$k$-Unterräumen/usw. als Knoten.
- Zwei Knoten $a, b$ sind adjazent, falls $|a \cap b| < t$/$\dim(a \cap b) < t$/usw.
- Die $(n, k, t)$-EKR Mengen $Y$ von $\Gamma$ sind genau die Cocliquen von $\Gamma$.

**Beispiel ($(4, 2, 1)$-EKR Mengen von Mengen)**

- Die Knoten: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$.

# Graphen

Man kann das Problem graphentheoretisch formulieren:

- Betrachte einen Graph $\Gamma$ mit $k$-Mengen/$k$-Unterräumen/usw. als Knoten.
- Zwei Knoten $a, b$ sind adjazent, falls $|a \cap b| < t$/$\dim(a \cap b) < t$/usw.
- Die $(n, k, t)$-EKR Mengen $Y$ von $\Gamma$ sind genau die Cocliquen von $\Gamma$.

**Beispiel ((4, 2, 1)-EKR Mengen von Mengen)**

- Die Knoten: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$.
- Adjazent sind genau
    - $\{1, 2\}$ und $\{3, 4\}$,
    - $\{1, 3\}$ und $\{2, 4\}$,
    - $\{1, 4\}$ und $\{2, 3\}$.
- Maximale Cocliquengröße offensichtlich 3.

# Eine Eigenwerttechnik

Die Adjazenzmatrix $A$ von $\Gamma$: Für Knoten $a, b$ ist

$$(A)_{ab} := \begin{cases} 1 & \text{falls } a \text{ und } b \text{ adjazent,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

# Eine Eigenwerttechnik

Die Adjazenzmatrix $A$ von $\Gamma$: Für Knoten $a, b$ ist

$$(A)_{ab} := \begin{cases} 1 & \text{falls } a \text{ und } b \text{ adjazent,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Satz (Hoffmanschranke für Cocliquen)**

*Wenn $\Gamma$ $k$-regulär ist, $N$ Knoten hat und $\lambda_{\min}$ der kleinste Eigenwert der Adjazenzmatrix von $\Gamma$ ist, dann*

$$|Y| \leq \frac{N\lambda_{\min}}{\lambda_{\min} - k}.$$

# Eine Eigenwerttechnik

Die Adjazenzmatrix $A$ von $\Gamma$: Für Knoten $a, b$ ist

$$(A)_{ab} := \begin{cases} 1 & \text{falls } a \text{ und } b \text{ adjazent,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Satz (Hoffmanschranke für Cocliquen)**

*Wenn $\Gamma$ $k$-regulär ist, $N$ Knoten hat und $\lambda_{\min}$ der kleinste Eigenwert der Adjazenzmatrix von $\Gamma$ ist, dann*

$$|Y| \leq \frac{N\lambda_{\min}}{\lambda_{\min} - k}.$$

Die Schranke ist für viele Varianten des Problems scharf!

## Beispiel ((4, 2, 1)-EKR Mengen von Mengen)

- Die Knoten: $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$.

### Beispiel ((4, 2, 1)-EKR Mengen von Mengen)

- Die Knoten: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$.
- Also ist die Adjazenzmatrix bei obiger Anordnung der Knoten

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Beispiel ($(4, 2, 1)$-EKR Mengen von Mengen)

- Die Knoten: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$.
- Also ist die Adjazenzmatrix bei obiger Anordnung der Knoten

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Eigenwerte: $-1$ und $1$. Hoffmanschranke:

$$|Y| \leq \frac{N\lambda_{\min}}{\lambda_{\min} - k} = \frac{(-1) \cdot 6}{-1 - 1} = 3.$$

# Weitere Eigenwerttechniken

**Problem**

*Was tun, wenn die Hoffmanschranke nicht scharf ist?*

# Weitere Eigenwerttechniken

**Problem**

*Was tun, wenn die Hoffmanschranke nicht scharf ist?*

Verwandte algebraische Techniken, u.a.:

1. (Gewichtete) Ratio-Schranken: Für bestimmte erweiterte gewichtete Adjazenzmatrizen $W$ von $\Gamma$ gilt

$$|Y| \leq \frac{N \cdot \lambda_{\min}(W)}{\lambda_{\min}(W) - k_W}.$$

   Im Gegensatz zur Hoffmanschranke scharf für EKR Mengen von Permutationsgruppen (Godsil, Meagher (2008)).

# Weitere Eigenwerttechniken

**Problem**

*Was tun, wenn die Hoffmanschranke nicht scharf ist?*

Verwandte algebraische Techniken, u.a.:

1. (Gewichtete) Ratio-Schranken: Für bestimmte erweiterte gewichtete Adjazenzmatrizen $W$ von $\Gamma$ gilt

$$|Y| \leq \frac{N \cdot \lambda_{\min}(W)}{\lambda_{\min}(W) - k_W}.$$

   Im Gegensatz zur Hoffmanschranke scharf für EKR Mengen von Permutationsgruppen (Godsil, Meagher (2008)).

2. Spezialfall für distanzreguläre Graphen:
   Delsartes Linear Programming Schranke.

# Weitere Eigenwerttechniken

**Problem**

*Was tun, wenn die Hoffmanschranke nicht scharf ist?*

Verwandte algebraische Techniken, u.a.:

1. (Gewichtete) Ratio-Schranken: Für bestimmte erweiterte gewichtete Adjazenzmatrizen $W$ von $\Gamma$ gilt

$$|Y| \leq \frac{N \cdot \lambda_{\min}(W)}{\lambda_{\min}(W) - k_W}.$$

   Im Gegensatz zur Hoffmanschranke scharf für EKR Mengen von Permutationsgruppen (Godsil, Meagher (2008)).

2. Spezialfall für distanzreguläre Graphen:
   Delsartes Linear Programming Schranke.

3. Cliquen-Cocliquen-Schranke: Für jede Clique $Z$ und Coclique $Y$ gilt

$$|Y| \cdot |Z| \leq |\Gamma|.$$

# Polarräume

Endliche klassische Polarräume sind Inzidenzgeometrien (Punkte, Geraden, ..., $d$-dimensionale Unterräume).

# Polarräume

Endliche klassische Polarräume sind Inzidenzgeometrien (Punkte, Geraden, . . . , $d$-dimensionale Unterräume). Es gibt:

- $Q^-(2d+3, q)/\Omega^-(2d+4, q)$: Elliptische Quadrik.
- $Q(2d+2, q)/\Omega(2d+3, q)$: Parabolische Quadrik.
- $Q^+(2d+1, q)/\Omega^+(2d+2, q)$: Hyperbolische Quadrik.

# Polarräume

Endliche klassische Polarräume sind Inzidenzgeometrien (Punkte, Geraden, ..., $d$-dimensionale Unterräume). Es gibt:

- $Q^-(2d+3,q)/\Omega^-(2d+4,q)$: Elliptische Quadrik.
- $Q(2d+2,q)/\Omega(2d+3,q)$: Parabolische Quadrik.
- $Q^+(2d+1,q)/\Omega^+(2d+2,q)$: Hyperbolische Quadrik.
- $W(2d+1,q)/Sp(2d+2,q)$: Symplektischer Polarraum.
- $H(2d+1,q^2)/U(2d+2,q^2)$: Hermitescher Polarraum.
- $H(2d+2,q^2)/U(2d+3,q^2)$: Hermitescher Polarraum.

# Erdős-Ko-Rado Mengen in Polarräumen

**Definition**

Eine **Erdős-Ko-Rado Menge** $Y$ von Erzeugern (maximal total-isotropen Unterräumen) eines Polarraums ist eine Menge von paarweise nicht disjunkten Erzeugern.

# Erdős-Ko-Rado Mengen in Polarräumen

## Definition

Eine **Erdős-Ko-Rado Menge** $Y$ von Erzeugern (maximal total-isotropen Unterräumen) eines Polarraums ist eine Menge von paarweise nicht disjunkten Erzeugern.

## Beispiele

1. Die Menge aller Erzeuger durch einen festen Punkt.
2. Die Menge aller Erzeuger, die eine feste Ebene in mindestens einer Gerade treffen.
3. Die Menge aller Erzeuger, die einen festen 4-Raum in mindestens einer Ebene treffen.
4. Für $c \in \mathbf{N}$ gerade: Alle Erzeuger, die einen festen $c$-Raum in mindestens Dimension $c/2$ treffen.

# Was ist bekannt?

**Satz (Stanton (1980))**

*Für fast alle endlichen klassischen Polarräume ist die Hoffmanschranke scharf und die EKR Menge aller Erzeuger durch einen festen Punkt ist ein Beispiel maximaler Größe.*

# Was ist bekannt?

**Satz (Stanton (1980))**

*Für fast alle endlichen klassischen Polarräume ist die Hoffmanschranke scharf und die EKR Menge aller Erzeuger durch einen festen Punkt ist ein Beispiel maximaler Größe. Ausnahmen:*

1. $Q^+(2d+1, q)$, *$d$ gerade: die Menge aller Erzeuger eines Typs (griechisch/lateinisch) hat maximale Größe.*

# Was ist bekannt?

**Satz (Stanton (1980))**

*Für fast alle endlichen klassischen Polarräume ist die Hoffmanschranke scharf und die EKR Menge aller Erzeuger durch einen festen Punkt ist ein Beispiel maximaler Größe. Ausnahmen:*

1. $Q^+(2d+1, q)$, *$d$ gerade: die Menge aller Erzeuger eines Typs (griechisch/lateinisch) hat maximale Größe.*
2. $H(2d+1, q^2)$, *$d$ gerade: Schranke ungefähr* $q^{d^2+d}$*. Größtes bekannte Beispiel für* $d > 2$ *ungefähr* $q^{d^2}$*.*

# Was ist bekannt?

**Satz (Stanton (1980))**

*Für fast alle endlichen klassischen Polarräume ist die Hoffmanschranke scharf und die EKR Menge aller Erzeuger durch einen festen Punkt ist ein Beispiel maximaler Größe. Ausnahmen:*

1. $Q^+(2d+1, q)$, *$d$ gerade: die Menge aller Erzeuger eines Typs (griechisch/lateinisch) hat maximale Größe.*
2. $H(2d+1, q^2)$, *$d$ gerade: Schranke ungefähr $q^{d^2+d}$. Größtes bekannte Beispiel für $d > 2$ ungefähr $q^{d^2}$.*

Danach:

- Pepe, Storme, Vanhove (2011): Scharfe obere Schranke für $H(5, q^2)$ und Klassifizierung aller EKR Mengen maximaler Größe. Ausnahme: $H(2d+1, q^2)$, $d > 2$ gerade.

# Beispiele in $H(2d+1, q^2)$, $d$ gerade

**Beispiel ($H(5, q^2)$)**

1. Alle Erzeuger durch einen festen Punkt: $|Y| \approx q^4$.
2. Alle Erzeuger durch die Geraden einer festen Ebene: $|Y| \approx q^5$.

# Beispiele in $H(2d+1, q^2)$, $d$ gerade

**Beispiel ($H(5, q^2)$)**

1. Alle Erzeuger durch einen festen Punkt: $|Y| \approx q^4$.
2. Alle Erzeuger durch die Geraden einer festen Ebene: $|Y| \approx q^5$.

**Beispiel ($H(9, q^2)$)**

1. Alle Erzeuger durch einen festen Punkt: $|Y| \approx q^{16}$.
2. Alle Erzeuger durch die Ebenen eines festen Erzeugers: $|Y| \approx q^{16}$.

**Beispiel ($H(2d+1, q^2)$)**

1. Alle Erzeuger durch einen festen Punkt: $|Y| \approx q^{d^2}$.
2. Alle Erzeuger durch die $d/2$-dimensionalen Unterräume eines festen Erzeugers: $|Y| \approx q^{\frac{3}{4}d^2+d}$.

# Die bekannten Ergebnisse

**Satz (Stanton (1980))**

*Für $H(2d+1, q^2)$, $d$ gerade, gilt*

$$|Y| \lessapprox q^{d^2+d}.$$

# Die bekannten Ergebnisse

**Satz (Stanton (1980))**

*Für $H(2d+1, q^2)$, $d$ gerade, gilt*

$$|Y| \lessapprox q^{d^2+d}.$$

**Satz (Pepe, Storme, Vanhove (2011))**

*Für $H(5, q^2)$ gilt*

$$|Y| \leq q^5 + q^3 + q + 1.$$

*mit Klassifikation im Fall von Gleichheit.*

# Die bekannten Ergebnisse

**Satz (Stanton (1980))**

*Für $H(2d+1, q^2)$, $d$ gerade, gilt*

$$|Y| \lessapprox q^{d^2+d}.$$

**Satz (Pepe, Storme, Vanhove (2011))**

*Für $H(5, q^2)$ gilt*

$$|Y| \leq q^5 + q^3 + q + 1.$$

*mit Klassifikation im Fall von Gleichheit.*

**Satz (Ihringer, Metsch (2012))**

*Für $H(2d+1, q^2)$, $d$ gerade, gilt*

$$|Y| \lessapprox q^{d^2+1}.$$

# Bekannte Grenzen für $H(2d+1, q^2)$, $d$ gerade

## Beste obere Schranke

$$|Y| \lessapprox q^{d^2+1}.$$

## Größtes bekanntes Beispiel für $d > 2$ gerade

$$|Y| \approx q^{d^2}.$$

Hier ist $Y$ die Menge aller Erzeuger durch einen festen Punkt.

# Bekannte Grenzen für $H(2d+1, q^2)$, $d$ gerade

## Beste obere Schranke

$$|Y| \lessapprox q^{d^2+1}.$$

## Größtes bekanntes Beispiel für $d > 2$ gerade

$$|Y| \approx q^{d^2}.$$

Hier ist $Y$ die Menge aller Erzeuger durch einen festen Punkt.

## Computerresultat

Für $q = 2$ und $d = 4$: $|Y| \leq 114939$ und Gleichheit für Beispiel.

# Bekannte Grenzen für $H(2d+1, q^2)$, $d$ gerade

**Beste obere Schranke**

$$|Y| \lessapprox q^{d^2+1}.$$

**Größtes bekanntes Beispiel für $d > 2$ gerade**

$$|Y| \approx q^{d^2}.$$

Hier ist $Y$ die Menge aller Erzeuger durch einen festen Punkt.

**Computerresultat**

Für $q = 2$ und $d = 4$: $|Y| \leq 114939$ und Gleichheit für Beispiel.

**Vermutung**

Die größte bekannte EKR-Menge ist die größtmögliche EKR-Menge.

**Problem**

*Warum verallgemeinert sich das größte Beispiel für $H(5, q^2)$ nicht zu einem größten Beispiel von $H(2d + 1, q^2)$?*

### Problem

*Warum verallgemeinert sich das größte Beispiel für $H(5, q^2)$ nicht zu einem größten Beispiel von $H(2d + 1, q^2)$?*

### Lösung

*Die Verallgemeinerung muss richtig gewählt werden.*

### Definition

Eine $(d, d - t)$-**Erdős-Ko-Rado Menge** $Y$ von Erzeuger (maximal total isotropen Unterräumen) eines Polarraum ist eine Menge von Erzeugern, die sich paarweise in mindestens Dimension $d - t$ schneiden.

### Problem

*Warum verallgemeinert sich das größte Beispiel für $H(5, q^2)$ nicht zu einem größten Beispiel von $H(2d+1, q^2)$?*

### Lösung

*Die Verallgemeinerung muss richtig gewählt werden.*

### Definition

Eine $(d, d-t)$-**Erdős-Ko-Rado Menge** $Y$ von Erzeuger (maximal total isotropen Unterräumen) eines Polarraum ist eine Menge von Erzeugern, die sich paarweise in mindestens Dimension $d-t$ schneiden.

Weitere Motivation:

1. Mögliche Rückschlüsse auf $(d, 0)$-EKR Mengen für $H(2d+1, q^2)$.
2. Das Problem wurde bereits für viele weitere EKR-Probleme untersucht.

# $(d, d-2)$-EKR Mengen in $H(2d+1, q^2)$

**Beispiel ($(2,0)$-EKR Mengen von $H(5, q^2)$)**

1. Alle Erzeuger durch einen festen Punkt: $|Y| = |\Sigma H(3, q^2)| \approx q^4$.
2. Alle Erzeuger durch die Geraden einer festen Ebene: $|Y| \approx q^5$.

**Beispiel ($(3,1)$-EKR Mengen von $H(7, q^2)$)**

1. Alle Erzeuger durch eine feste Gerade: $|Y| = |\Sigma H(3, q^2)| \approx q^4$.
2. Alle Erzeuger durch die Ebenen eines festen 3-dimensionalen Unterraums: $|Y| \approx q^7$.

# $(d, d-2)$-EKR Mengen in $H(2d+1, q^2)$

**Beispiel ($(2, 0)$-EKR Mengen von $H(5, q^2)$)**

1. Alle Erzeuger durch einen festen Punkt: $|Y| = |\Sigma H(3, q^2)| \approx q^4$.
2. Alle Erzeuger durch die Geraden einer festen Ebene: $|Y| \approx q^5$.

**Beispiel ($(3, 1)$-EKR Mengen von $H(7, q^2)$)**

1. Alle Erzeuger durch eine feste Gerade: $|Y| = |\Sigma H(3, q^2)| \approx q^4$.
2. Alle Erzeuger durch die Ebenen eines festen 3-dimensionalen Unterraums: $|Y| \approx q^7$.

**Beispiel ($(d, d-2)$-EKR Mengen von $H(2d+1, q^2)$)**

1. Alle Erzeuger durch einen festen $(d-2)$-Raum: $|Y| \approx q^4$.
2. Alle Erzeuger durch die $(d-1)$-dimensionalen Unterräume eines festen Erzeugers: $|Y| \approx q^{2d+1}$.

# $(d, d-2)$-EKR Mengen in $Q^-(2d+3, q)$

**Beispiel ((2, 0)-EKR Mengen von $Q^-(7, q)$)**

1. Alle Erzeuger durch einen festen Punkt: $|Y| = |\Sigma Q^-(5, q)| \approx q^5$.
2. Alle Erzeuger durch die Geraden einer festen Ebene: $|Y| \approx q^4$.

**Beispiel ((3, 1)-EKR Mengen von $Q^-(9, q)$)**

1. Alle Erzeuger durch eine feste Gerade: $|Y| \approx q^5$.
2. Alle Erzeuger durch die Ebenen eines festen 3-dimensionalen Unterraums: $|Y| \approx q^5$

# $(d, d-2)$-EKR Mengen in $Q^-(2d+3, q)$

**Beispiel ($(2,0)$-EKR Mengen von $Q^-(7, q)$)**

1. Alle Erzeuger durch einen festen Punkt: $|Y| = |\Sigma Q^-(5, q)| \approx q^5$.
2. Alle Erzeuger durch die Geraden einer festen Ebene: $|Y| \approx q^4$.

**Beispiel ($(3,1)$-EKR Mengen von $Q^-(9, q)$)**

1. Alle Erzeuger durch eine feste Gerade: $|Y| \approx q^5$.
2. Alle Erzeuger durch die Ebenen eines festen 3-dimensionalen Unterraums: $|Y| \approx q^5$

**Beispiel ($(d, d-2)$-EKR sets of $Q^-(2d+3, q)$)**

1. Alle Erzeuger durch einen festen $(d-2)$-Raum: $|Y| \approx q^5$.
2. Alle Erzeuger durch die $(d-1)$-dimensionalen Unterräume eines festen Erzeugers: $|Y| \approx q^{d+2}$.

# Was ist wahr?

**Erste Gedanken**

Für große $d$ ist die größte $(d, d-2)$-EKR Menge die Menge aller Erzeuger, die einen festen Erzeuger mindestens in einem $(d-1)$-dimensionalen Unterraum treffen.

# Was ist wahr?

## Erste Gedanken

Für große $d$ ist die größte $(d, d-2)$-EKR Menge die Menge aller Erzeuger, die einen festen Erzeuger mindestens in einem $(d-1)$-dimensionalen Unterraum treffen.

## Satz (Ihringer, Metsch (2013))

*In allen endlichen klassischen Polarräumen gilt für $3t \lessapprox 2d$:*

1. *$t$ gerade: Die größte $(d, d-t)$-EKR Menge ist die Menge aller Erzeuger, die einen festen $d$-Raum in mindestens Dimension $d - \frac{t}{2}$ trifft.*

# Was ist wahr?

### Erste Gedanken

Für große $d$ ist die größte $(d, d-2)$-EKR Menge die Menge aller Erzeuger, die einen festen Erzeuger mindestens in einem $(d-1)$-dimensionalen Unterraum treffen.

### Satz (Ihringer, Metsch (2013))

*In allen endlichen klassischen Polarräumen gilt für $3t \lessapprox 2d$:*

1. *$t$ gerade: Die größte $(d, d-t)$-EKR Menge ist die Menge aller Erzeuger, die einen festen $d$-Raum in mindestens Dimension $d - \frac{t}{2}$ trifft.*
2. *$t$ ungerade: Die größte $(d, d-t)$-EKR Menge ist die Menge aller Erzeuger, die einen festen $(d-1)$-Raum in mindestens Dimension $d - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$ trifft.*

# Was ist wahr?

### Erste Gedanken

Für große $d$ ist die größte $(d, d-2)$-EKR Menge die Menge aller Erzeuger, die einen festen Erzeuger mindestens in einem $(d-1)$-dimensionalen Unterraum treffen.

### Satz (Ihringer, Metsch (2013))

*In allen endlichen klassischen Polarräumen gilt für $3t \lessapprox 2d$:*

1. *$t$ gerade: Die größte $(d, d-t)$-EKR Menge ist die Menge aller Erzeuger, die einen festen $d$-Raum in mindestens Dimension $d - \frac{t}{2}$ trifft.*
2. *$t$ ungerade: Die größte $(d, d-t)$-EKR Menge ist die Menge aller Erzeuger, die einen festen $(d-1)$-Raum in mindestens Dimension $d - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$ trifft.*

*Insbesondere Stabilitätsaussagen: Sobald eine $(d, d-t)$-EKR Menge hinreichend groß ist, ist sie in einem der beiden Beispiele enthalten.*

# $r$-fache EKR Mengen

**Problem**

*Betrachte $r$-fache EKR Mengen $Y$: Statt*

$$y_1, y_2 \in Y \Rightarrow y_1 \cap y_2 \neq \emptyset$$

*fordert man*

$$y_1, \ldots, y_r \in Y \Rightarrow y_1 \cap \ldots \cap y_r \neq \emptyset.$$

# $r$-fache EKR Mengen

**Problem**

*Betrachte $r$-fache EKR Mengen $Y$: Statt*

$$y_1, y_2 \in Y \Rightarrow y_1 \cap y_2 \neq \emptyset$$

*fordert man*

$$y_1, \ldots, y_r \in Y \Rightarrow y_1 \cap \ldots \cap y_r \neq \emptyset.$$

- Frankl (1976): Vollständige Betrachtung für EKR Mengen von Mengen.
- Chowdhury, Patkós (2009): Verallgemeinerung von Frankls Resultaten auf PG($n$, $q$).
- Unbekannt für Polarräume.

# Kreuzweise schneidende EKR Mengen

**Problem (Kleitman (1968))**

*Sich kreuzweise schneidende EKR Mengen: Statt*

$$y, z \in Y \Rightarrow y \cap z \neq \emptyset$$

*fordert man nur*

$$y \in Y, z \in Z \Rightarrow y \cap z \neq \emptyset.$$

# Kreuzweise schneidende EKR Mengen

**Problem (Kleitman (1968))**

*Sich kreuzweise schneidende EKR Mengen: Statt*

$$y, z \in Y \Rightarrow y \cap z \neq \emptyset$$

*fordert man nur*

$$y \in Y, z \in Z \Rightarrow y \cap z \neq \emptyset.$$

- Pyber (1981), Matsumoto, Tokushige (1989): Scharfe Schranke für $|Y| \cdot |Z|$ und Klassifikation Beispiele maximaler Größe für Mengen.
- Hilton (1977): Scharfe Schranke für $|Y| + |Z|$ und Klassifikation Beispiele maximaler Größe für Mengen.

# Kreuzweise schneidende EKR Mengen

**Problem (Kleitman (1968))**

*Sich kreuzweise schneidende EKR Mengen: Statt*

$$y, z \in Y \Rightarrow y \cap z \neq \emptyset$$

*fordert man nur*

$$y \in Y, z \in Z \Rightarrow y \cap z \neq \emptyset.$$

- Pyber (1981), Matsumoto, Tokushige (1989): Scharfe Schranke für $|Y| \cdot |Z|$ und Klassifikation Beispiele maximaler Größe für Mengen.
- Hilton (1977): Scharfe Schranke für $|Y| + |Z|$ und Klassifikation Beispiele maximaler Größe für Mengen.
- Für Polarräume: Kleinste bekannte obere Schranke für $|Y| \cdot |Z|$ ist meist um den Faktor 4 größer als das größte bekannte Beispiel.